

UNIVERSITE DU QUEBEC

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DU QUEBEC A TROIS-RIVIERES

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE ES SCIENCES (PHYSIQUE)

PAR

LOUIS MARCHILDON

B. Sp. SCIENCES (PHYSIQUE)

DYNAMIQUE ET ELECTRODYNAMIQUE DES TACHYONS

JUILLET 1973

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

RESUME

Dynamique et électrodynamique des tachyons

Louis Marchildon

Université du Québec à Trois-Rivières

Nous dégageons quelques conséquences dynamiques et électrodynamiques de l'approche des tachyons proposée récemment par A. F. Antippa et A. E. Everett. Nous supposons, conformément à la philosophie de cette approche, que les tachyons sont des bradyons dans des référentiels supraluminaires. L'analyse tensorielle est utilisée pour développer la plupart des résultats, eu égard à l'hypothèse selon laquelle les quantités qui se transforment comme des tenseurs sous les transformations de Lorentz gardent cette propriété sous les transformations supraluminales. Tous les paramètres utilisés dans la description des bradyons (par exemple le lagrangien, l'hamiltonien, le champ électromagnétique, etc.) trouvent leur analogue dans la description des tachyons. Dans plusieurs cas, nous effectuons cette description de deux manières équivalentes, en utilisant ce que nous appelons les variables réciproques. L'un des principaux résultats que nous obtenons est la modification de la signification des lois de conservation dans les processus supraluminaires. Notre travail se restreint à des transformations supraluminales le long du corridor des ta-

chyons, et ne considère pas les phénomènes particuliers à la mécanique quantique ou à la théorie de la relativité générale. L'étude des interactions entre les tachyons, qui occupe la presque totalité de ce travail, permet d'entrevoir certaines exigences auxquelles doivent satisfaire les interactions qui font intervenir et des bradyons, et des tachyons. Elle permet également d'amorcer l'évaluation des expériences qui ont déjà été faites pour détecter des tachyons.

AVANT-PROPOS

C'est au printemps 1971 que remonte l'origine de ce travail. Le docteur Antippa m'entretint alors de la possibilité d'étudier quelques implications de la nouvelle approche des tachyons sur laquelle il travaillait avec le professeur A. E. Everett. Il me parla tout particulièrement du développement des conséquences électrodynamiques. J'acquiesçai immédiatement à la perspective de travailler sur un sujet si original.

En octobre 1971, nous étions en mesure de présenter quelques résultats préliminaires au congrès de l'Acfas.⁺

A mesure que nous progressions cependant, nous nous rendions compte que l'électrodynamique ne pouvait être développée sans que soit d'abord clarifié le simple point de vue dynamique. Nous nous sommes également aperçus de la grande différence qu'il y a entre le problème de l'interaction des tachyons entre eux et celui de l'interaction des tachyons et des bradyons. Nous nous limiterons d'ailleurs, sauf à la toute fin de ce travail, au premier de ces deux problèmes.

Notre étude se restreint à des phénomènes non quantiques, dans

⁺ Marchildon, L. et Antippa, A. F., Electrodynamique des tachyons; le résumé de la communication se trouve dans les Annales de l'Acfas, 38, 129 (1971).

un espace où il n'y a pas d'effets caractéristiques du domaine de la relativité générale.

Je profite de ces lignes pour signaler quelques points particuliers de la présentation.

J'utilise tout au cours de ce travail les unités électromagnétiques mks rationalisées. En ce qui regarde les définitions des principaux quadritenseurs, les usages varient souvent d'un auteur à l'autre. J'ai choisi les définitions qui me semblaient les plus convenables. Que le lecteur m'excuse cependant de m'être involontairement écarté de l'usage dans la définition des tenseurs électromagnétiques F et G . J'ai appelé F ce que la plupart nomment G , et vice versa.

Les articles et les volumes auxquels je réfère sont notés dans le texte principal au moyen de chiffres entre crochets (par exemple, [1]) qui renvoient à la bibliographie.

Que les puristes me pardonnent, entre autres choses, l'introduction de plusieurs néologismes ("supraluminal", "tachyonique", "interagir", etc.), qui m'ont semblé fort utiles à la clarté du texte.

Je tiens à remercier très sincèrement tous ceux qui ont contribué de quelque manière à l'élaboration de ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant au conseil national de recherches du Canada et aux responsables du fonds de recherches de l'université du Québec à Trois-Rivières de l'aide financière dont j'ai bénéficié.

Je remercie tous les professeurs des départements de physique et de mathématique pour l'empressement qu'il ont toujours manifesté à satisfaire ma curiosité.

Au docteur Antippa, je veux exprimer de façon toute particulière ma plus vive gratitude. La confiance dont il m'a honoré, la discrétion avec laquelle il m'a guidé et l'enthousiasme qu'il m'a communiqué ont fait de ce travail un plaisir.

Trois-Rivières, juillet 1973

TABLE DES MATIERES

	Page
AVANT-PROPOS	i
TABLE DES MATIERES	iv
TABLE DES FIGURES	v
INDEX DES PRINCIPAUX SYMBOLES	vi
 Chapitre	
I. L'APPROCHE DE BILANIUK, DESHPANDE ET SUDARSHAN	1
A - Le problème de l'accélération: une troisième clas- se de particules	1
B - Le principe de réinterprétation	5
C - Les problèmes de causalité	8
II. LES INDICES EXPERIMENTAUX	12
A - Détection du rayonnement Čerenkov des tachyons . .	12
B - Utilisation des propriétés dynamiques des tachyons	16
C - Autres expériences	20
III. L'APPROCHE D'ANTIPPA ET EVERETT	23
A - Référentiels supraluminaires	24
B - Particules supraluminaires	27
C - Les problèmes de causalité	30
IV. LA METHODE DE TRAVAIL	36
A - Position du problème	36
B - Utilisation de l'analyse tensorielle	37
C - Tenseurs de base et matrices de transformation . .	40
D - Le principe de réciprocité	46
V. DYNAMIQUE SUPRALUMINALE	50
A - 4-vecteur impulsion d'un tachyon	50
B - Transformation de la force; force de Minkowski . .	54
C - Lagrangien et hamiltonien d'une particule libre .	59
D - Variables réciproques	63

VI. CHAMP ELECTROMAGNETIQUE SUPRALUMINAL	71
A - Le 4-vecteur courant et le tenseur du champ élec- tromagnétique	71
B - Equations de Maxwell supraluminales; 4-vecteur potentiel	75
C - Propagation des champs électrique et magnétique supraluminaux	83
D - Champs électrique et magnétique d'une charge en mouvement uniforme le long du corridor des ta- chyons	92
E - Les équations de Maxwell supraluminales; autres formulations	99
VII. ELECTRODYNAMIQUE SUPRALUMINALE	106
A - Action du champ électromagnétique sur une parti- cule chargée	106
B - Lagrangien et hamiltonien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	113
C - Tenseurs d'énergie-impulsion	117
D - Lois de conservation sous forme intégrale	127
VIII. CONCLUSION	135
BIBLIOGRAPHIE	140

TABLE DES FIGURES

Figure

1. Propagation d'un front d'onde hyperbolique et déter- mination de la vitesse de phase	86
2. Hypersurface sur laquelle on intègre le tenseur d'é- nergie-impulsion du champ	124
3. Hypersurfaces utilisées pour obtenir les lois de con- servation sous forme intégrale	129

INDEX DES PRINCIPAUX SYMBOLES

N. B. Ce ne sont pas tous les symboles employés dans le texte qui sont rassemblés ici, et un symbole particulier n'est pas toujours accompagné de toutes ses significations. En définitive, nous n'indiquons que les principales significations des principaux symboles.

A_μ	composante du potentiel vecteur
A^μ	4-vecteur potentiel
B_μ	composante du champ magnétique
H_μ	composante du champ magnétique réciproque
\vec{B}_0	$= -B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$
c	vitesse de la lumière dans le vide
e	charge de l'électron
E	énergie
E_μ	composante du champ électrique
E'_μ	composante du champ électrique réciproque
f_μ	composante de la force
\mathcal{F}_μ	composante de la force réciproque
F^μ	force de Minkowski
$F^{\mu\lambda}$	tenseur du champ électromagnétique

$g^{\kappa\lambda}$	tenseur métrique
$G_{\kappa\lambda}$	dual de $F^{\kappa\lambda}$
H	hamiltonien
H_λ	hamiltonien réciproque
\hat{l}	vecteur tridimensionnel unitaire parallèle au corridor des tachyons
\hat{j}	vecteur tridimensionnel unitaire parallèle à l'axe y
J_x	composante de la densité de courant
\bar{J}_y	composante de la densité de courant réciproque
J^κ	4-vecteur courant
\hat{k}	vecteur tridimensionnel unitaire parallèle à l'axe z
L	lagrangien
L_λ	lagrangien réciproque
m_0	masse propre d'une particule
O	observateur immobile dans Σ
p_x	composante de l'impulsion
p^κ	4-vecteur impulsion
P^κ	4-vecteur impulsion du champ électromagnétique
P_x	moment canonique conjugué à la coordonnée x
P_y	moment canonique réciproque conjugué à la coordonnée y
P_m	point dans l'espace quadridimensionnel
q	charge électrique
Δ	$= \sqrt{x^2 + t^2 + y^2 + z^2}$
ds	élément de longueur
S	hypersurface dans l'espace quadridimensionnel
t	temps
$T^\kappa{}_\lambda$	tenseur d'énergie-impulsion du champ

u_k	composante de la vitesse d'une particule relativement à \mathcal{Z}
U^k	4-vecteur vitesse
v	vitesse de \mathcal{Z}' par rapport à \mathcal{Z}
w	vitesse de \mathcal{Z}'' par rapport à \mathcal{Z}
W	$= \frac{1}{2} \{ E^2 + c^2 B^2 \}$
κ	coordonnée le long du corridor des tachyons
X^k	4-rayon vecteur
y	coordonnée le long d'un axe perpendiculaire au corridor des tachyons
z	coordonnée le long d'un axe perpendiculaire aux axes y et κ
$\alpha_{k\lambda}$	l'une des matrices des transformations supraluminales
$\alpha_{k\lambda}^*$	l'une des matrices des transformations de Lorentz
β	$= v/c$
$\beta_{k\lambda}$	l'autre matrice des transformations supraluminales
$\beta_{k\lambda}^*$	l'autre matrice des transformations de Lorentz
γ	$= \{ \beta^2 - 1 \}^{-1/2}$
γ^*	$= \{ 1 - \beta^2 \}^{-1/2}$
$\delta(\kappa)$	fonction de Dirac
δ^k_{λ}	fonction de Kronecker (on l'écrit aussi $\delta_{k\lambda}$, qui n'est pas le correspondant covariant de δ^k_{λ})
$\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$	4-tenseur complètement antisymétrique
ϵ_0	permittivité du vide
\bar{v}_y	composante de la vitesse réciproque
θ	angle d'inclinaison d'un vecteur vers le corridor des tachyons
θ^k_{λ}	tenseur d'énergie-impulsion de la matière
k	indice variant de 1 à 4 (c'est un indice covariant s'il est en bas, et contrevariant s'il est en haut d'un tenseur)
λ	indice variant de 1 à 4

μ	indice variant de 1 à 4
μ_0	densité de masse propre
ω	indice variant de 1 à 4
ω	fréquence
ξ	$= \omega / c$
π	indice variant de 1 à 4
ρ	densité de charge
ρ	densité de charge réciproque
Σ	référentiel par rapport auquel Σ' et Σ'' se déplacent à des vitesses supraluminales; les quantités mesurées dans Σ sont notées sans ('), celles qui sont mesurées dans Σ' sont notées avec un ('), etc.
$d\sigma^\mu$	4-vecteur infinitésimal perpendiculaire à une hypersurface dans l'espace quadridimensionnel
τ	temps propre
φ	potentiel scalaire
Ω	hypervolume dans l'espace quadridimensionnel

CHAPITRE I

L'APPROCHE DE BILANIUK, DESHPANDE ET SUDARSHAN

A. Le problème de l'accélération: une troisième classe de particules

L'étude des particules plus rapides que la lumière (que Feinberg a nommées "tachyons") a toujours exercé un attrait particulier sur les théoriciens. Avant la publication, en 1905, de la théorie de la relativité restreinte, Sommerfeld et quelques autres en avaient envisagé la possibilité, se basant sur l'électrodynamique classique[†]. Mais les résultats de la relativité restreinte dressèrent un sérieux obstacle à leur existence. Cet obstacle se dégage d'un examen de l'équation relativiste reliant l'énergie E d'une particule à sa masse propre m_0 et à sa vitesse u , i.e.

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.1)$$

[†]On trouvera en [9] la référence à quelques uns de ces travaux.

où \mathcal{C} désigne la vitesse de la lumière dans le vide. L'équation (1.1) exprime le fait que l'énergie de la particule croît indéfiniment à mesure que sa vitesse s'approche de celle de la lumière. Par conséquent l'accélération d'une particule initialement immobile jusqu'à la vitesse de la lumière, nécessitant une quantité infinie d'énergie, est impossible. A fortiori son accélération jusqu'à une vitesse supraluminale est-elle aussi impossible.

Cette difficulté et bien d'autres en tête, O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande et E. C. G. Sudarshan (BDS) proposèrent en 1962 [9] une solution originale[†]. Les photons, se dirent-ils, se propagent à la vitesse de la lumière sans pour autant violer les lois relativistes. La raison en est qu'on a jamais besoin de les accélérer jusqu'à la vitesse de la lumière, mais qu'ils y sont directement créés et y demeurent jusqu'à

[†]Les articles traitant des tachyons ou plus particulièrement de l'approche BDS sont passablement nombreux. Nous en signalons une bonne partie dans la bibliographie. Disons immédiatement que [9], [10], [11], [21], [22], [36], [46], [71] et [73] donnent une vue générale de l'approche BDS, que la mécanique quantique et la théorie des champs sont introduits en [4], [12], [19], [21], [27], [28], [32], [35], [64] et [69], qu'on traite en [11], [23], [61] et [65] des effets de relativité générale et que [34], [62], [63], [72] et [74] réfèrent à des travaux antérieurs à (ou contemporains de) BDS. Nous dégagerons, au fur et à mesure que nous en aurons besoin, les articles traitant des problèmes de causalité, des études expérimentales, du rayonnement Čerenkov et de l'hypothèse de référentiels supraluminaires. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [17] et [41] pour compléter la bibliographie sommaire que nous lui offrons.

leur absorption. Pourquoi alors les tachyons ne pourraient-ils pas être créés avec une vitesse supérieure à \mathcal{C} ? Cette hypothèse permettrait de supposer leur existence sans devoir abandonner l'équation (1.1), et de plus elle établirait une symétrie intéressante entre les trois classes de particules alors existantes: d'une part celles dont les vitesses seraient toujours subluminales; d'autre part celles qui se déplaceraient toujours à des vitesses supraluminales; enfin celles dont les vitesses seraient toujours égales à \mathcal{C} .

Arrêtons-nous un instant pour dégager quelques conséquences de l'hypothèse que nous venons de faire. La racine carrée apparaissant dans l'équation (1.1) présente un aspect plutôt étrange lorsque μ est plus grande que \mathcal{C} . Elle est imaginaire. Or il faut bien que l'énergie soit réelle, puisque c'est une quantité bien mesurable. La seule façon d'y arriver est de supposer que la masse propre de la particule, en l'occurrence m_0 , soit elle aussi imaginaire. Cette conclusion paraît pour le moins insolite, mais elle n'est quand même pas absurde. On se rappelle que seules les quantités physiquement mesurables doivent être réelles. Cela implique que la masse propre d'un tachyon n'est pas mesurable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de référentiel dans lequel le tachyon soit immobile. L'approche BDS se limitera donc aux seuls référentiels subluminiaux, qui en définitive sont ceux avec lesquels on travaille en relativité restreinte.

L'équation (1.1) révèle d'autres propriétés des tachyons. Examinons le spectre des valeurs de l'énergie obtenues lorsque la vitesse de la particule varie. Ne nous attachons pas pour l'instant au signe de l'énergie. Il est aisé de voir que E est une fonction monotone de μ

sur l'intervalle ouvert (c, ∞) . Aux limites, E est infinie lorsque μ égale c et s'annule lorsque μ égale ∞ . D'autre part, on sait que l'impulsion d'une particule est donnée par l'équation

$$p = \frac{m_0 \mu}{\sqrt{1 - \mu^2/c^2}} \quad (1.2)$$

qui montre que p est également une fonction monotone de μ sur l'intervalle ouvert (c, ∞) . Comme E , p devient infinie lorsque μ égale c mais, contrairement à E , elle a une valeur finie et égale à $m_0 c$ lorsque μ égale ∞ .

L'approche BDS vise à introduire les particules supraluminales sans modifier les lois physiques relativistes. On sait qu'en théorie de la relativité la somme de deux vitesses prend une forme particulière. Supposons par exemple qu'un observateur dans un référentiel Σ'' voie une particule se déplacer à une vitesse μ'' dirigée le long de l'axe x'' . Supposons de plus qu'un référentiel Σ' se déplace relativement à Σ'' à une vitesse w parallèle à μ'' . Alors la vitesse μ' de la particule mesurée par un observateur immobile dans Σ' satisfait à l'équation

$$\mu' = \frac{\mu'' - w}{1 - w\mu''/c^2} \quad (1.3)$$

De cette relation, nous pouvons déduire le résultat suivant: $|\mu'|$ sera inférieure, égale ou supérieure à c selon que $|\mu''|$ sera elle aussi inférieure, égale ou supérieure à c . Cela signifie que le classement des parti-

cules en subluminales, lumineuses et supraluminales est le même aux yeux de tous les observateurs dans des référentiels d'inertie dont les vitesses relatives sont parallèles à celles des particules. Un développement plus général peut aisément lever cette dernière restriction, et le classement est invariant quel que soit l'observateur et quelles que soient les particules.

B. Le principe de réinterprétation

Introduisons de nouveau nos deux référentiels Σ' et Σ'' , dont la vitesse relative est w . Supposons qu'une particule de masse propre m_0 se déplace à une vitesse supraluminale u' dirigée le long du sens positif de l'axe x' . Supposons de plus qu'aux instants t'_1 et t'_2 elle soit respectivement située aux positions x'_1 et x'_2 .

L'énergie E' et l'impulsion p' de la particule telles que mesurées dans Σ' sont données par des relations analogues aux équations (1.1) et (1.2), d'où l'on tire que

$$E' = c^2 p' / u' \quad (1.4)$$

D'autre part, si un observateur situé dans Σ'' mesure lui aussi l'énergie et l'impulsion de la particule, il obtient, selon les transformations relativistes:

$$E'' = \gamma^* [E' + w p'] \quad (1.5a)$$

$$p'' = \left[p' + \frac{\omega E'}{c^2} \right] \gamma^* \quad (1.5b)$$

où

$$\gamma^* = \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} \right]^{-1/2} \quad (1.6)$$

En substituant l'équation (1.4) dans les équations (1.5), nous obtenons:

$$E'' = \gamma^* E' \left[1 + \frac{\omega \mu'}{c^2} \right] \quad (1.7a)$$

$$p'' = \gamma^* p' \left[1 + \frac{\omega}{\mu'} \right] \quad (1.7b)$$

De l'équation (1.7b) on voit que, quelle que soit la valeur de ω (pourvu qu'elle soit subluminaire, bien sûr), le signe de p'' est le même que celui de p' . Par contre on voit de l'équation (1.7a) que, si $-c < \omega < -\frac{c^2}{\mu'}$, alors le signe de E'' est différent de celui de E' . C'est donc dire qu'à ce moment la particule possède, selon l'observateur dans Σ'' , une énergie négative. Voilà un nouveau problème!

Nous pouvons d'ailleurs tirer des conclusions analogues en ce qui regarde les intervalles de coordonnées. Nous souvenant qu'aux instants t_1' et t_2' la particule était respectivement située aux positions x_1' et x_2' , nous obtenons, par l'utilisation des transformations de Lorentz:

$$t_2'' - t_1'' \equiv \Delta t'' = \gamma^* \left[\Delta t' + \frac{\omega \Delta x'}{c^2} \right] \quad (1.8a)$$

$$K_2'' - K_1'' \equiv \Delta K'' = \gamma^* \left[\Delta K' + w \Delta t' \right] \quad (1.8b)$$

Vu que la quantité $\frac{\Delta K'}{\Delta t'}$ n'est rien d'autre que la vitesse μ' de la particule, on peut réarranger les équations (1.8). Ainsi

$$\Delta t'' = \gamma^* \Delta t' \left[1 + \frac{w \mu'}{c^2} \right] \quad (1.9a)$$

$$\Delta K'' = \gamma^* \Delta K' \left[1 + \frac{w}{\mu'} \right] \quad (1.9b)$$

L'équation (1.9b) signifie que $\Delta K''$ a toujours le même signe que $\Delta K'$ tandis que l'équation (1.9a) signifie que, dans les cas où $-c < w < -c^2/\mu'$, le signe de $\Delta t''$ est différent de celui de $\Delta t'$. Aux yeux de certains observateurs donc, une particule supraluminale se propage dans le sens inverse du temps, ce qui nous pose un autre problème.

Qu'à cela ne tienne! de dire BDS! Certes le sens du temps peut être inversé, et le signe de l'énergie changé, mais n'est-il pas remarquable que ces deux phénomènes se produisent précisément dans les mêmes circonstances, i.e. lorsque w est inférieure à $-c^2/\mu'$. Un transfert d'énergie négative dans le sens inverse du temps est complètement équivalent à un transfert d'énergie positive dans le sens ordinaire du temps. Donc lorsqu'un observateur voit un tachyon se déplacer dans le sens inverse du temps avec une énergie négative E'' et une impulsion \vec{p}'' , il le réinterprète comme un tachyon se déplaçant dans le sens ordinaire du temps avec une énergie positive $-E''$ et une impulsion $-\vec{p}''$. Ce changement de perspective est d'ailleurs appelé, dans la littérature, reinterprétation principe ou switching principle.

Illustrons cet important principe par un exemple. Considérons dans \mathcal{L}' un atome A excité qui émet au temps t_1' un tachyon d'énergie positive. Ce tachyon se déplace et, au temps ultérieur t_2' , est absorbé par un atome B qui devient par le fait même excité. Selon un autre observateur, ce processus peut apparaître comme suit: un tachyon d'énergie négative est émis par l'atome A au temps t_1'' et est absorbé par l'atome B à un moment antérieur t_2'' . Cet observateur réinterprète le phénomène en disant que, puisque l'émission d'énergie négative est équivalente à l'absorption d'énergie positive, c'est l'atome B qui émet un tachyon à t_2'' et l'atome A qui l'absorbe à t_1'' . Tout est donc normal, l'énergie et les intervalles de temps sont positifs. Certes les deux observateurs ne s'accordent pas sur les détails du processus (les rôles de l'absorbant et de l'émetteur sont inversés). Toutefois le principe de relativité ne requiert d'aucune façon que les faits observés et la description des événements soient les mêmes dans tous les référentiels. Seules les lois physiques doivent être covariantes.

C. Les problèmes de causalité

Une application adroite du principe de réinterprétation résout de nombreux paradoxes que l'on peut construire à partir de la théorie BDS. En particulier elle élimine d'emblée la possibilité de sources d'énergie infinie. Il demeure malgré tout une très vieille objection à l'existence des tachyons. Formulée dès 1917 par Richard C. Tolman, elle nécessite beaucoup plus d'attention qu'une simple application du principe de réin-

interprétation.[†]

Supposons que deux observateurs O' et O'' possèdent chacun un émetteur et un détecteur de tachyons. Supposons de plus qu'ils aient les instructions suivantes: à l'instant t_0' , O' doit émettre un tachyon vers O'' si et seulement s'il n'en a pas reçu durant les quelques minutes précédentes; O'' , lui, doit émettre un tachyon vers O' dès qu'il en reçoit un; autrement, il n'en émet pas.

Il peut alors se passer ceci: O' , ne recevant pas de tachyon avant t_0' , en émet un qui parvient à O'' à un moment ultérieur t_1' . Dès lors, ce dernier renvoie un tachyon vers O' qui parvient à son destinataire à un instant t_2' . Si t_2' est ultérieur à t_0' , c'est-à-dire si le deuxième tachyon se propage dans le sens ordinaire du temps, alors il n'y a pas de problème. Mais nous avons vu que tel n'est pas toujours le cas. Pour certaines vitesses relatives de O' et O'' et pour certains tachyons, il arrive en effet que ces derniers se déplacent dans le sens inverse du temps. Si donc le tachyon émis par O'' est un de ceux-là, il se peut fort bien que t_2' soit plus petit que t_0' , et donc que le second tachyon arrive à O' avant que le premier n'en parte. Mais alors, O' ayant l'instruction formelle de n'envoyer son premier tachyon que s'il n'en a pas auparavant reçu, il ne devrait pas l'émettre. D'où le paradoxe: O' pose un geste qui l'empêche de poser ce geste....

Formulé de cette manière, le paradoxe se prête aisément à une

[†] On trouvera dans [11] une exposition de l'objection de même que la référence à Tolman.

première solution. En effet puisque le second tachyon se propage, aux yeux de O' , dans le sens inverse du temps, il a aussi une énergie négative. O' peut donc appliquer le principe de réinterprétation et dire qu'à t_2' il a émis un tachyon d'énergie positive plutôt qu'absorbé un tachyon d'énergie négative. Par conséquent, n'ayant absorbé aucun tachyon avant t_0' , il est à cet instant libre d'émettre.

Mais le problème n'est pas si vite réglé. Quelques petites modifications rendent en effet le paradoxe beaucoup plus puissant. Nous allons en considérer deux types.

Dans notre exemple, l'échange de tachyons se fait entre deux observateurs seulement. Dès lors, pour qu'il y ait paradoxe, le tachyon critique doit parvenir à O' avec une énergie négative, ce qui permet l'application du principe de réinterprétation. Mais il est possible de construire une chaîne causale qui, pourvu qu'elle comporte plus de deux participants, soit telle que chacun n'absorbe et n'émette que des tachyons qui, selon lui, possèdent des énergies positives [52]. Il est beaucoup plus difficile alors de se réfugier derrière le principe de réinterprétation et de nier l'absorption d'un tachyon.

D'autre part on peut, sans introduire plus de deux observateurs, modifier les instructions de départ [7]. Supposant qu'un faisceau de tachyons puisse être modulé, elles peuvent être comme suit: O' enverra vers O'' un signal (par exemple son nom) si et seulement si ses appareils n'en ont pas reçu ou émis un autre quelques minutes auparavant. O'' , lui, retournera un signal vers O' aussitôt que ses appareils auront détecté le signal de O' . Le principe de réinterprétation est ici difficilement

applicable puisque les deux participants ont l'instruction de répondre aussi bien à une émission qu'à une absorption. La possibilité de réponse à une émission spontanée non reliée à l'expérience est virtuellement détruite par l'envoi de signaux porteurs d'information.

Tel que formulé maintenant, le problème est fort complexe. Il s'en faut de beaucoup que l'accord ne soit fait entre les théoriciens qui s'y intéressent. La discussion s'oriente autour de sujets tels que la possibilité de n'émettre ou de n'absorber que certains tachyons; les notions de causalité avancée ou retardée et la possibilité de distinguer cause et effet sans référence à l'ordre temporel; la libre volonté. Une discussion détaillée du problème tel qu'il se pose dans sa forme la plus raffinée nous mènerait beaucoup trop loin. Nous préférons renvoyer le lecteur intéressé aux principales publications le traitant.[†]

[†]Voir [2], [7], [8], [11], [12], [14], [15], [20], [24], [25], [45], [50], [51], [52], [57], [58], [59], [66], [70], [74], [75], [76], [79] et [81].

CHAPITRE II

LES INDICES EXPERIMENTAUX

L'approche BDS a montré, hormis quelques points qui demeurent en suspens, que les théories physiques bien établies n'excluent pas d'emblée la possibilité des tachyons. Le principal problème que nous devons résoudre est dès lors d'ordre expérimental: pratiquement, les tachyons existent-ils, oui ou non?

Au cours des années soixante, quelques groupes d'expérimentateurs se mirent à la tâche. Ils ont cherché bien sûr en se guidant sur les résultats de BDS. Leurs conclusions n'en sont pas moins d'importants jalons dont on doit tenir compte dans toute approche des tachyons. Il nous semble donc opportun de résumer ici les principaux de ces travaux.

A. Détection du rayonnement Čerenkov des tachyons

Il est bien connu que, lorsqu'une particule chargée se propage

dans un milieu d'indice de réfraction n à une vitesse supérieure à c/n , il y a émission de rayonnement Čerenkov. D'aucuns se sont dits que, puisque l'indice de réfraction du vide est 1 et que les tachyons se déplacent toujours à une vitesse supérieure à c , ils devraient donner lieu à un tel effet.

Une première tentative, menée par T. Alväger et M. N. Kreisler (1968) [3], visa à détecter le rayonnement Čerenkov de tachyons chargés qui seraient produits par paires lors de l'incidence de rayons γ sur du plomb.

L'arrangement est celui-ci: une source au césium-134 émet entre autres des rayons γ de 0.6 et 0.8 MeV, que l'on absorbe au moyen d'une masse de plomb. Des considérations théoriques laissent supposer qu'il y aurait alors production de paires de tachyons chargés [21] et que ces tachyons se propageraient à travers le plomb sans interagir appréciablement avec lui. Ils parviendraient ainsi à l'extérieur du plomb, dans un vide poussé, où ils seraient censés émettre un rayonnement Čerenkov. D'autre part on applique un champ électrique dans cette région, de sorte qu'il s'établisse un équilibre entre la perte d'énergie due à l'effet Čerenkov et le gain d'énergie dû au champ. Cette perte d'énergie due à l'effet Čerenkov est évaluée, pour chaque tachyon, au moyen de la formule usuelle:

$$\frac{dE}{ds} = - \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{c^2} \int \left[1 - \frac{c^2}{u^2 n^2} \right] u \, du \quad (2.1)$$

où ds est un élément de trajectoire, Ze la charge du tachyon, u sa vitesse et u la fréquence du rayonnement émis. On suppose qu'aucun photon

n'est émis qui rende l'énergie du tachyon négative, c'est-à-dire que la région sur laquelle on effectue l'intégrale apparaissant dans (2.1) est restreinte par l'inégalité

$$0 < h\omega < E \quad (2.2)$$

Dans le dispositif expérimental, le rayonnement est recueilli au moyen d'un photomultiplicateur.

Le résultat négatif de l'expérience a amené les auteurs à conclure que la section efficace pour la production de tachyons de charge comprise entre $0.1e$ et $2e$ (où e est la charge de l'électron) et de masse à peu près arbitraire est inférieure à 3 microbarns (μb) lors de l'incidence de rayons γ de 0.8 MeV sur du plomb. Pour fin de comparaison, la section efficace pour la production de paires électrons-positrons par des photons de quelques MeV est environ dix mille fois plus grande.

L'expérience ainsi conçue est basée sur plusieurs hypothèses, dont nous signalons les plus importantes: (i) un champ électrique modifie l'énergie d'un tachyon de la même manière que celle d'un bradyon; (ii) l'effet Čerenkov s'opère selon la formule (2.1), l'émission des photons étant limitée par (2.2);[†] (iii) le plomb n'absorbe pas appréciablement les tachyons; (iv) si les tachyons sont des fermions, alors il existe des niveaux énergétiques non occupés dont les énergies ne dépassent pas 0.8 MeV.

[†] La validité de cette hypothèse est fort discutée. Par exemple, la restriction sur l'émission des photons n'est pas invariante sous une transformation de Lorentz. Voir [13], [26], [29], [33], [42] et [77].

Pour restreindre cette dernière hypothèse, l'expérience fut reprise l'année suivante par les mêmes auteurs en compagnie de M. B. Davis [18]. Ils utilisèrent cette fois-là une source de rayons γ d'environ 1.25 MeV. Le résultat négatif posa une limite supérieure de 2 nb à la section efficace pour la production de tachyons de charge comprise entre 0.5e et 1.9e. On note que la limite posée par cette expérience est environ mille fois plus basse que la précédente, ceci étant dû à quelques améliorations du dispositif.

D. F. Bartlett et M. D. Lahana (1972) [6] réalisèrent une expérience assez semblable aux deux précédentes, à ceci près qu'ils cherchèrent des tachyons magnétiquement chargés plutôt qu'électriquement chargés. Il faut dire qu'il avait auparavant été suggéré que les tachyons pourraient exister à l'état de monopôles [49].

Une source au cobalt-60 émet des rayons γ de 1.17 et 1.33 MeV qui, étant absorbés par de l'eau et du plomb, donnent présument naissance à des paires nord-sud de monopôles tachyoniques. On suppose que ces monopôles parviennent à l'extérieur sans s'être recombines et qu'ils émettent un rayonnement Čerenkov selon des formules analogues à (2.1) et (2.2). La perte d'énergie due à l'effet Čerenkov est ici compensée par un gain provenant de l'application d'un champ magnétique.

Le résultat négatif a posé des limites supérieures respectives de 0.6 et 2 pb aux sections efficaces pour la production de monopôles dans le plomb et dans l'eau. L'expérience était sensible à des tachyons de charge magnétique comprise entre 0.1g et 4g (où g est le monopôle de Dirac).

B. Utilisation des propriétés dynamiques des tachyons

Il s'agit ici de se servir soit des relations particulières entre l'énergie et l'impulsion des tachyons, soit du fait que leur énergie peut être négative.

Un premier groupe de chercheurs, composé de C. Baltay, G. Feinberg, N. Yeh et R. Linsker (1970) [5], visèrent à établir l'existence de tachyons neutres. Ces particules, n'émettant pas de rayonnement Čerenkov, n'auraient pas été détectées par les expériences décrites précédemment.

On sait qu'on peut "observer" des particules chargées par les traces qu'elles laissent dans une chambre à bulles. Considérons une interaction où deux particules chargées produisent d'autres particules, chargées ou non. Appelons l'énergie et l'impulsion totales des particules incidentes E_a et \vec{p}_a respectivement, celles des particules résultantes chargées E_b et \vec{p}_b et celles des particules résultantes neutres E_n et \vec{p}_n . Les lois de conservation nous donnent alors que

$$E_a = E_b + E_n \quad (2.3a)$$

$$\vec{p}_a = \vec{p}_b + \vec{p}_n \quad (2.3b)$$

La connaissance de la nature des particules chargées de même que les traces qu'elles laissent dans la chambre à bulles permettent de déterminer E_a , E_b , \vec{p}_a et \vec{p}_b . On obtient alors E_n et \vec{p}_n au moyen des équations (2.3). Si toutes les particules neutres sont des bradyons ou des

luxons (luxon: particule de masse propre nulle) on a sûrement:

$$E_N^2 - c^2 |\vec{p}_N|^2 \geq 0 \quad (2.4)$$

Par contre, s'il n'y a qu'une seule particule neutre et qu'il s'agisse d'un tachyon, on obtient:

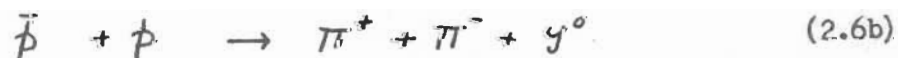
$$E_N^2 - c^2 |\vec{p}_N|^2 < 0 \quad (2.5)$$

S'il y a plusieurs particules neutres dont une ou plusieurs sont des tachyons, alors le membre de gauche des relations (2.4) et (2.5) peut avoir n'importe quel signe.

En définitive, dans toute réaction satisfaisant à l'équation (2.5), il y aura nécessairement production de tachyons neutres. Il s'agit donc de chercher une telle réaction.

La puissance de cette expérience vient de ce qu'on n'a pas besoin de détecter les tachyons produits. Elle est donc insensible à leurs interactions avec la matière ordinaire (sauf, bien entendu, l'interaction qui les produirait) de même qu'à leur mode de propagation.

Comme on s'y attend, le résultat fut une fois de plus négatif. Les auteurs ont examiné des spécimens des réactions



et ils ont montré que, lorsque κ^0 et γ^0 représentent un ou deux tachyons, les sections efficaces sont au moins 400 fois inférieures à celles obtenues lorsque κ^0 et γ^0 représentent un ou deux pions.

J. S. Danburg et plusieurs autres chercheurs (1971) [16] effectuèrent une expérience d'un genre un peu différent. Ils examinèrent des collisions de mésons K^- de 2.2 GeV/c avec des protons immobiles. Ils ont tenté de trouver la réaction

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \tau^+ + \tau^- \quad (2.7)$$

où τ^+ et τ^- représentent respectivement un tachyon positif et un tachyon négatif.

D'ordinaire de telles collisions produisent, en plus de la particule Λ^0 , des pions et des kaons. L'expérience consiste à examiner plusieurs spécimens de la réaction (2.7) et à attribuer aux particules chargées des énergies et impulsions en supposant que les particules en question sont des pions ou des kaons. S'il s'avère que les relations énergie-impulsion sont absolument discordantes, alors on essaiera une interprétation en termes de tachyons.

Contrairement à l'expérience précédente, celle-ci n'a pas besoin, pour donner un résultat positif, que le 4-vecteur impulsion des deux tachyons chargés satisfasse à la relation (2.5). Par ailleurs, elle dépend des hypothèses suivantes: (i) le comportement d'un tachyon dans une chambre à bulles est analogue à celui d'un bradyon; (ii) les tachyons perdent beaucoup plus d'énergie par ionisation dans la chambre à bulles que par

rayonnement Čerenkov.

Le résultat négatif de l'expérience posa, sous certaines conditions dynamiques, une limite supérieure de $0.2 \mu\text{b}$ à la section efficace de la réaction (2.7).

En terminant cette section, signalons un groupe de trois expériences, interprétées par J. S. Danburg et G. R. Kalbfleisch (1972) [17], qui cherchèrent des réactions telles

$$p \longrightarrow p + \tau^0 \quad (2.8a)$$

$$p \longrightarrow p + \tau + \bar{\tau} \quad (2.8b)$$

Il s'agit tout simplement de la désintégration d'un proton immobile en un proton mobile et un ou deux tachyons d'énergie totale négative.

Les auteurs ont d'abord cherché directement dans une chambre à bulles des protons qui, soudainement, se mettraient à bouger. Ils n'en ont pas trouvé. Ils ont ainsi conclu que le temps moyen de désintégration du proton par les équations (2.8) est supérieur à 2×10^{21} ans lorsque l'énergie cinétique de récession du proton est comprise entre 5 MeV et 1 GeV.

Ils ont ensuite reconsidéré des expériences faites antérieurement en vue de vérifier la conservation des baryons et des électrons. Il avait alors été établi que les protons libres de même que les électrons et les nucléons liés ne se désintégraient pas de manière à violer ces lois de conservation. Danburg et Kalbfleisch ont montré que ces expériences

permettent de conclure que des réactions comme (2.8) ne se produisent généralement pas en moins de 10^{22} à 10^{29} ans.

La terre est un immense réservoir de nucléons et d'électrons. Si les réactions (2.8) avaient lieu fréquemment, plusieurs tachyons d'énergie négative seraient produits dans la terre. En supposant que ces tachyons en sortiraient sans être appréciablement absorbés, la terre gagnerait de l'énergie, et la perdrait ultérieurement en chaleur. Une mesure du flux de chaleur émanant de la terre pose donc une limite supérieure aux réactions (2.8). Les auteurs ont montré que, sous des hypothèses favorables, elles ont une demi-vie de plus de 10^{17} ans.

Les limites obtenues de ces expériences signifient que les couplages mis en jeu dans la production de tachyons par (2.8) sont inférieurs de plusieurs ordres de grandeur au couplage gravitationnel, qui est le plus faible connu.

C. Autres expériences

Les rayons cosmiques constituent une source appréciable de particules élémentaires. P. V. Ramana Murthy fait d'ailleurs remarquer que plusieurs particules y ont été découvertes bien avant que leur existence ne fût soupçonnée théoriquement. Il décida donc de chercher s'il n'y trouverait pas de tachyons (1971) [54].

On sait que lorsqu'une particule cosmique arrive dans l'atmosphère, elle produit un grand nombre de particules secondaires. Certaines

d'entre elles (électrons et photons) voyagent à peu près à la vitesse de la lumière et constituent une avant-garde assez bien définie. Les autres, plus lourdes, suivent à quelque distance.

Si des tachyons étaient produits en plus des particules ordinaires, ils arriveraient bien sûr avant elles. L'auteur installa donc deux détecteurs potentiels de tachyons (l'un, fonctionnant par effet Čerenkov et assez semblable à celui de Alväger; l'autre, formé d'un scintillateur couplé à une cellule photomultiplicatrice) et nota les coïncidences entre les réponses de ces détecteurs et une arrivée ultérieure de photons, d'électrons ou de particules lourdes.

Le nombre de coïncidences fut de l'ordre de celui auquel on s'attendrait par pur hasard. Même en les attribuant toutes à des tachyons, les rayons cosmiques considérés produiraient au moins dix mille fois plus d'électrons que de tachyons.

Face à tous ces résultats négatifs, quelques expérimentateurs affirment pourtant avoir observé des phénomènes révélateurs de tachyons. P. M. Rapier (1971) [55], utilisant deux radiotélescopes distants de 3,900 km, a réalisé des mesures interférométriques lui permettant de déterminer des vitesses de séparation angulaire de composantes d'une quasar explosante (3C-279). Ayant mesuré d'une part le rougissement de son spectre, sa position, sa luminosité, il put estimer sa distance. Il en a déduit la présence de vitesses plusieurs fois supérieures à celle de la lumière. Bien sûr on n'accepte ces résultats qu'avec une sérieuse réserve, vu les nombreux facteurs d'erreurs intervenant dans les mesures astrophysiques, spécialement celles des distances.

Doit-on conclure de tout ceci que la probabilité d'existence des tachyons est nulle? Ce serait à notre avis prématuré. Il ne faut pas oublier que les expériences que nous avons décrites sont basées sur des hypothèses souvent fort restrictives. D'ailleurs, nous ne les avons à date évaluées qu'en regard de l'approche BDS. Il sera intéressant, à la fin de ce travail, de les considérer d'un autre point de vue.

CHAPITRE III

L'APPROCHE D'ANTIPPA ET EVERETT

Nous avons vu qu'en postulant la validité de l'équation (1.1) pour des vitesses supraluminales, Bilaniuk, Deshpande et Sudarshan ont été amenés à attribuer aux tachyons une masse propre imaginaire. Nous avons signalé que cela implique l'impossibilité de référentiels supraluminiaux.

Pour peu cependant que des équations comme (1.1) soient éliminées dans les cas de vitesses supraluminales, l'introduction de masses propres imaginaires n'a plus de raison d'être. De plus les arguments qui prohibent l'existence de référentiels animés d'une vitesse \mathcal{C} se révèlent caducs lorsque appliqués aux référentiels supraluminiaux. L'hypothèse de tels référentiels devient donc intéressante. De fait quelques théoriciens se sont attaqués au problème ainsi posé.⁺ Nous allons décrire dans ce chapitre l'une de ces approches, celle d'Antippa et Everett.⁺⁺ Tout ce travail sera

⁺ Voir [30], [34], [39], [40], [41], [47], [49], [53] et [56] .

⁺⁺ L'approche en question est développée en [80] et [81] . Le premier de ces articles se limite toutefois à une théorie unidimensionnelle.

basé sur elle.

A. Référentiels supraluminiaux

Antippa et Everett postulent l'existence dans l'espace d'une direction privilégiée qu'ils appellent le corridor des tachyons, et d'un ensemble de référentiels[†] privilégiés en ce que leurs vitesses relatives sont toutes parallèles au corridor des tachyons. On suppose que les lois physiques sont les mêmes dans tous ces référentiels, c'est-à-dire que le principe de relativité y est respecté.

L'introduction d'une direction privilégiée requiert, vu l'interconnexion entre transformations de Lorentz et rotations, celle d'une vitesse privilégiée perpendiculaire au corridor des tachyons. Cela signifie qu'un observateur dans un référentiel d'inertie arbitraire peut mesurer sa vitesse par rapport au corridor.

Le module de la vitesse relative de deux référentiels privilégiés est arbitraire, à ceci près qu'il ne peut pas être égal à C . Les relations entre les coordonnées d'un événement dans deux référentiels privilégiés sont de deux sortes, selon que le module de la vitesse relative des deux référentiels est sub- ou supraluminal. De façon explicite, considérons trois référentiels privilégiés Σ , Σ' et Σ'' dont les origines

[†]Dans ce qui suit, "référentiel" signifie toujours "référentiel d'inertie".

spatio-temporelles coïncident. Désignons par l'axe \mathcal{K} la direction du corridor des tachyons, et supposons que \mathcal{Z}' se déplace par rapport à \mathcal{Z}'' à une vitesse subluminaire w et par rapport à \mathcal{Z} à une vitesse supraluminale v . Alors les équations reliant les coordonnées d'un événement dans les trois référentiels sont les suivantes:

$$\mathcal{K}'' = \gamma^* [\mathcal{K}' + w t'] \quad (3.1a) \quad \mathcal{K} = \frac{\gamma \beta}{|\beta|} [\mathcal{K}' + v t'] \quad (3.2a)$$

$$y'' = y' \quad (3.1b) \quad y = y' \quad (3.2b)$$

$$z'' = z' \quad (3.1c) \quad z = z' \quad (3.2c)$$

$$t'' = \gamma^* \left[t' + \frac{w \mathcal{K}'}{c^2} \right] \quad (3.1d) \quad t = \frac{\gamma \beta}{|\beta|} \left[t' + \frac{v \mathcal{K}'}{c^2} \right] \quad (3.2d)$$

où

$$\gamma^* = \left[1 - \frac{w^2}{c^2} \right]^{-1/2} \quad (3.3a)^+$$

$$\gamma = \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right]^{-1/2} \quad (3.3b)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (3.3c)$$

Comme on pouvait s'y attendre, les relations (3.1) ne sont rien d'autre que les transformations de Lorentz.

⁺Dans ce qui suit, un astérisque (*) ne signifie jamais "complexe conjugué".

Un observateur dans Σ' peut ainsi diviser l'ensemble des référentiels privilégiés en deux sous-ensembles disjoints: ceux qui se déplacent par rapport à lui à une vitesse subluminale, et ceux qui se déplacent à une vitesse supraluminale. On peut montrer que les éléments de chacun de ces deux sous-ensembles sont les mêmes quel que soit l'observateur privilégié qui fasse la division, à ceci près que, si deux observateurs se déplacent l'un par rapport à l'autre à une vitesse supérieure à c , alors ce qui était supraluminal pour l'un devient subluminal pour l'autre et vice versa.

Bien que nous nous bornions dans ce travail aux transformations entre référentiels privilégiés, nous allons dire quelques mots sur les autres référentiels, histoire d'avoir une vue globale de la théorie.

Considérons le référentiel Σ' introduit précédemment. Formons l'ensemble S_1 de tous les référentiels reliés à Σ' par une transformation de Lorentz arbitraire, c'est-à-dire non nécessairement selon l'axe x . S_1 contient, aux rotations et translations près, tous les référentiels introduits par la théorie de la relativité restreinte. Il contient en particulier les référentiels privilégiés subluminaux dont nous parlions tout à l'heure. D'autre part considérons le référentiel Σ et formons, comme nous l'avons fait avec Σ' , l'ensemble S_2 de tous les référentiels reliés à Σ par une transformation de Lorentz arbitraire. Dès lors la réunion des deux ensembles disjoints S_1 et S_2 forme l'ensemble complet des référentiels d'inertie, aux rotations et translations près.

Pour transformer les coordonnées d'un référentiel quelconque de S_1 en celles d'un référentiel quelconque de S_2 , il faut procéder comme

suit: d'abord passer du référentiel de départ aux coordonnées d'un référentiel privilégié de S_1 ; ensuite transformer ces dernières en celles d'un référentiel privilégié de S_2 ; finalement aboutir aux coordonnées du référentiel désiré. On peut montrer que le choix des référentiels intermédiaires est, à l'intérieur des restrictions déjà posées, indifférent.

B. Particules supraluminales

Le concept de référentiel supraluminal permet d'introduire très facilement celui de particule supraluminale. Supposons qu'une particule, par exemple un proton, soit immobile dans Σ' . Aux yeux d'un observateur dans Σ , elle est animée d'une vitesse v supraluminale. De bradyon qu'elle était dans Σ' , elle devient donc tachyon dans Σ . La distinction entre particules sub- et supraluminales n'est donc pas intrinsèque, mais est reliée à l'observateur qui les regarde. Grosso modo, les tachyons sont des bradyons observés dans un référentiel supraluminal. Comme dans la théorie de Sudarshan il n'est nul besoin, pour produire les seconds, d'accélérer les premiers.

Cette façon de voir les tachyons introduit des restrictions sur leurs vitesses. Pour les bien saisir, considérons une particule qui, relativement à Σ' , se déplace à une vitesse $\vec{u}' = u'_x \hat{i} + u'_y \hat{j} + u'_z \hat{k}$ telle que $u' = |\vec{u}'| \leq c$. Nous allons déterminer la vitesse \vec{u} de cette particule vue par un observateur dans Σ , en fonction de \vec{u}' et de v . Nous allons ensuite en dégager quelques particularités.

Dans Σ , la composante μ_x de la vitesse de la particule est donnée par

$$\mu_x = \frac{dx}{dt} \quad (3.4)$$

Substituant à dx et dt leurs valeurs en fonction de dx' et dt' telles que données par les équations (3.2), nous obtenons:

$$\mu_x = \frac{\mu'_x + v}{1 + \frac{\mu'_x v}{c^2}} \quad (3.5a)$$

Pour μ_y et μ_z on a, de façon analogue:

$$\mu_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\mu'_y}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[1 + \frac{\mu'_x v}{c^2} \right]} \quad (3.5b)$$

$$\mu_z = \frac{\mu'_z}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[1 + \frac{\mu'_x v}{c^2} \right]} \quad (3.5c)$$

Considérons maintenant la quantité $\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2$. Utilisant les équations (3.3) et (3.5), on obtient:

$$\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 = c^2 + \frac{c^2 - (\mu')^2}{\gamma^2 \left[1 + \frac{\mu'_x v}{c^2} \right]^2} \quad (3.6)$$

On remarque que le membre de droite de l'équation (3.6) est toujours positif. Par conséquent μ_x^2 est toujours plus grand que $\mu_y^2 + \mu_z^2$. Cela signifie que, dans un référentiel privilégié, la composante de la vitesse

d'un tachyon le long du corridor des tachyons est toujours plus grande que celle perpendiculaire au corridor. Le vecteur vitesse d'un tachyon ne s'incline ainsi jamais de plus de 45^0 vers la direction positive ou négative du corridor des tachyons.

Lorsque la particule est un luxon dans Σ' , c'est-à-dire lorsque μ' égale \mathcal{C} , l'équation (3.6) se réduit à

$$\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 = \mathcal{C}^2 \quad (3.7)$$

Appelons θ l'angle que délimitent la direction de la vitesse du luxon et l'axe x . On a alors:

$$|\cos \theta| = \frac{|\mu_x|}{\mu} \quad (3.8a) \quad |\sin \theta| = \frac{\sqrt{\mu_y^2 + \mu_z^2}}{\mu} \quad (3.8b)$$

D'autre part, considérons l'identité trigonométrique

$$\cos 2\theta \equiv \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (3.9)$$

et substituons-y les équations (3.8). Nous obtenons ainsi:

$$\cos 2\theta = \frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2}{\mu^2} = \frac{\mathcal{C}^2}{\mu^2} \quad (3.10)$$

où nous avons également utilisé l'équation (3.7). L'équation (3.10) signifie que le module de la vitesse, relativement à Σ' , d'une particule qui est un luxon dans Σ' , n'est pas toujours égal à \mathcal{C} . Il ne dépend

par contre que de l'inclinaison de la vitesse vers le corridor. Aux limites, il est égal à c lorsque θ vaut 0° ou 180° , et à ∞ lorsque θ vaut 45° ou 135° .

C. Les problèmes de causalité

Nous avons vu que dans l'approche BDS, la possibilité de particules voyageant dans le sens inverse du temps posait de sérieux problèmes. Il ne semblait pas y avoir de moyen simple d'éliminer le paradoxe de Tolman.

Nous nous souvenons que le paradoxe vient de ce qu'un observateur peut envoyer quelque information qui lui revienne d'une manière ou d'une autre avant qu'il ne l'ait envoyée. Nous allons voir cependant que l'approche d'Antippa et Everett l'élimine assez facilement. Pour ce faire, nous procéderons en trois étapes: nous établirons d'abord des limites sur les transferts d'information au moyen de tachyons; nous résoudrons ensuite le paradoxe du point de vue d'un observateur privilégié; nous le résoudrons finalement du point de vue d'un observateur arbitraire.

Nous partons de l'hypothèse que les bradyons et les luxons émis par des bradyons ne transmettent de l'information que dans un sens de leur ligne d'univers, celui qui correspond au sens positif du temps. Donc si un bradyon dans \mathcal{L}' se déplace du point (x_1, y_1, z_1, ct_1) au point (x_2, y_2, z_2, ct_2) de sorte que $t_2 - t_1 > 0$, l'information qu'il transmet va du premier point au second, et non l'inverse.

Dans Σ , ces deux points sont représentés par (x_1, y_1, z_1, ct_1) et (x_2, y_2, z_2, ct_2) , et les valeurs des coordonnées sont obtenues des précédentes au moyen des équations (3.2) des transformations supraluminales. On a en particulier:

$$\begin{aligned}\Delta x &\equiv x_2 - x_1 = \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [\Delta x' + v \Delta t'] \\ &= \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \Delta t' [\mu'_x + v]\end{aligned}\quad (3.11)$$

où l'on a utilisé le fait que μ'_x égale $\Delta x' / \Delta t'$. Cherchons le signe de Δx : l'expression entre crochets dans le membre de droite de (3.11) a bien sûr le signe de v , puisque v est supraluminale alors que μ'_x est subluminaire; le signe de β étant le même que celui de v , le produit des deux est positif et, par conséquent, Δx a le même signe que $\Delta t'$. Ainsi le fait que les transferts d'information au moyen des bradyons et des luxons qu'ils émettent ne se font que dans le sens de leur ligne d'univers correspondant au sens positif du temps implique, par les considérations précédentes, qu'ils ne se font au moyen des tachyons et des luxons qu'ils émettent que dans le sens de leur ligne d'univers correspondant au sens positif de l'axe x .

Quoique nous n'ayons considéré que des tachyons vus d'un référentiel privilégié, notre résultat est très général, car une transformation de Lorentz perpendiculaire au corridor des tachyons ne change pas la valeur de Δx .

Passons maintenant à la seconde étape. Pour ce faire, considé-

rons une suite de transferts d'information, du point de vue d'un référentiel privilégié. L'information est d'abord transmise d'un point $P_1 = (x_1, y_1, z_1, ct_1)$ à un point $P_2 = (x_2, y_2, z_2, ct_2)$ au moyen d'un bradyon, d'un luxon ou d'un tachyon; ensuite elle passe de P_2 à P_3 , et ainsi de suite jusqu'à $P_m = (x_m, y_m, z_m, ct_m)$. Pour qu'il y ait paradoxe, il faut que $x_1 = x_m$, $y_1 = y_m$, $z_1 = z_m$ et que $t_m < t_1$.

Posons ceci:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i \\ i &= 1, \dots, m-1 \\ \Delta t_i &= t_{i+1} - t_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dans tous les cas où le transfert d'information se fait au moyen de tachyons ou de luxons émis par des tachyons, on a:

$$\Delta x_k > 0 \quad (3.13a)$$

et, déduisant de (3.6) que $|\mu_k| \geq c$, on obtient:

$$\Delta x_k \geq c |\Delta t_k| \geq -c \Delta t_k \quad (3.13b)$$

D'autre part, lorsque le transfert d'information se fait au moyen de bradyons ou de luxons émis par des bradyons, on a:

$$\Delta t_k > 0 \quad (3.14a)$$

$$\kappa \Delta t_k \geq |\Delta \kappa_k| \geq -\Delta \kappa_k \Rightarrow \Delta \kappa_k \geq -\kappa \Delta t_k \quad (3.14b)$$

Des équations (3.13b) et (3.14b), nous obtenons que

$$\sum_{k=1}^{m-1} \Delta \kappa_k \geq \sum_{k=1}^{m-1} (-\kappa) \Delta t_k \quad (3.15)$$

qui ne signifie rien d'autre que

$$\kappa_m - \kappa_1 \geq -\kappa (t_m - t_1) \quad (3.16)$$

Pour qu'il y ait paradoxe, nous nous rappelons qu'il faut, entre autres conditions, que κ_m égale κ_1 et que t_m soit plus petit que t_1 . L'équation (3.16) rend impossible la réalisation simultanée de ces deux conditions.

Il ne nous reste maintenant, en troisième étape, qu'à montrer que ce résultat est valable même du point de vue d'un référentiel non privilégié. Nous procéderons par l'absurde, c'est-à-dire que nous montrerons que si le paradoxe se construit dans un référentiel non privilégié, il se construit aussi dans un référentiel privilégié.

Supposons qu'un référentiel Σ^0 se déplace relativement à Σ à une vitesse w_0 dirigée le long des axes communs y et y^0 . Supposons de plus qu'un observateur dans ce référentiel arrive à établir le paradoxe de Tolman. Explicitement il réalise une suite de transferts d'information au moyen de bradyons, luxons et tachyons entre les points P_1^0 , P_2^0 , P_n^0 telle que $\kappa_1^0 = \kappa_n^0$, $y_1^0 = y_n^0$, $z_1^0 = z_n^0$ et que

$$t_n^0 - t_1^0 = -\varepsilon, \text{ où } \varepsilon > 0.$$

Un observateur dans Σ voit dans ce processus un transfert d'information entre P_1 , P_2 , et P_n . Les transformations de Lorentz nous donnent les différences des coordonnées de P_n et de P_1 à partir de celles de P_n^0 et de P_1^0 :

$$\begin{aligned} t_n - t_1 &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{1 - \omega_0^2/c^2}} \\ y_n - y_1 &= \frac{-\varepsilon \omega_0}{\sqrt{1 - \omega_0^2/c^2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$x_n - x_1 = z_n - z_1 = 0$$

L'observateur dans Σ , ayant réalisé un tel processus, peut y ajouter une étape supplémentaire. Il peut envoyer un photon du point P_n à un point P_{n+1} dont les coordonnées spatiales correspondent à celles de P_1 (i.e. $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$ et $z_{n+1} = z_1$). Voyons un peu à quel moment arrivera ce photon: puisqu'il se déplace à une vitesse c ,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = c = \frac{y_1 - y_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (3.18)$$

Utilisant les équations (3.17) et (3.18), on obtient que

$$t_{n+1} - t_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \omega_0^2/c^2}} \left[\frac{\omega_0}{c} - 1 \right] < 0 \quad (3.19)$$

L'arrivée du photon est antérieure à t_1 , ce qui établit le paradoxe de Tolman dans Σ . Puisque nous avons vu tout à l'heure que c'est impossible, la preuve par l'absurde est complète. Il n'est donc pas possible, dans l'approche d'Antippa et Everett, de construire une chaîne causale où l'information revienne avant d'être partie, quel que soit le référentiel où nous soyons.

CHAPITRE IV

LA METHODE DE TRAVAIL

A. Position du problème

Réintroduisons les deux référentiels Σ et Σ' avec lesquels nous avons déjà travaillé. On se rappelle que Σ' se déplace, relativement à Σ , à une vitesse supraluminale u .

Supposons que deux observateurs O et O' soient immobiles dans Σ et Σ' respectivement. Supposons de plus qu'exception faite de l'observateur O , il n'existe que des particules qui sont des bradyons dans Σ' , ainsi que des luxons ou des champs produits par ces bradyons.⁺

L'observateur O' peut décrire le comportement de ces particules

⁺ Lorsque nous parlons de particules et de champs, nous nous restreignons à des particules qui se déplacent classiquement (i.e. de manière non quantique) dans des champs électromagnétiques. Cette remarque vaut pour toute la suite de ce travail, à moins qu'il ne soit autrement spécifié.

et de ces champs en appliquant les lois physiques que l'on connaît. Cela signifie en gros que les lois physiques lui permettent, à partir de conditions de frontières suffisantes, de prévoir le développement de la configuration du système particules-champs. L'observateur O voudrait en faire autant. Dans son référentiel, les bradyons de Σ' sont des tachyons. Il aimerait bien posséder un ensemble de lois qui lui permettent de prédire les trajectoires de ces tachyons à partir de conditions de frontières convenablement exprimées dans son référentiel. Notre but est de développer quelques unes de ces lois.

B. Utilisation de l'analyse tensorielle

Remarquons tout d'abord que rien ne nous permet d'affirmer que la description des processus supraluminiaux s'effectue par une simple application des lois physiques ordinaires. Nous nous rappelons que nous avons émis une hypothèse très précise au sujet des tachyons: ils sont des bradyons observés dans un référentiel supraluminal. Cette hypothèse étant faite, nous ne sommes plus libres de supposer n'importe quoi au sujet de leur comportement. Par exemple leurs trajectoires telles que vues par l'observateur O sont liées aux trajectoires correspondantes observées par O' , la liaison étant faite point par point au moyen des transformations supraluminales (3.2).

"Mais alors", diront certains, "puisque les trajectoires des tachyons sont déterminées par celles des bradyons correspondants, il n'est

plus nécessaire pour les connaître de développer tout un ensemble de lois. Si nous avons un problème d'interactions de tachyons, nous n'avons qu'à le résoudre dans un référentiel où ces particules sont des bradyons (et où les lois physiques ordinaires s'appliquent) et à exprimer par la suite le résultat dans le référentiel de départ."

Malheureusement tout n'est pas si simple. Certes la transformation de coordonnées spatio-temporelles d'un référentiel à l'autre ne pose aucun problème. Mais il n'en est pas de même des propriétés intrinsèques des particules. Pour connaître la charge ou la masse propre de tachyons, ce qui est absolument nécessaire à la solution d'un problème d'interactions, il faut que l'observateur O effectue des mesures. Il ne comprendra les résultats de ces mesures qu'en sachant comment les tachyons agissent sur les appareils, c'est-à-dire qu'il lui faut connaître certaines lois physiques. La solution d'un problème par transformation des trajectoires nécessite donc en plus la connaissance de lois physiques.

La méthode la plus sûre, qui fait intervenir le moins d'hypothèses, par laquelle l'observateur O peut obtenir un ensemble de lois propres à décrire le comportement de ses tachyons est certes l'expérience. Rien ne l'empêche d'appliquer la méthode scientifique comme l'ont fait, pour les bradyons, les hommes de science depuis des siècles; rien ne l'empêche d'observer ses tachyons,⁺ de noter leurs particularités, d'expé-

⁺Quand nous disons que O "observe" des tachyons, nous présumons bien sûr que les tachyons interagissent avec les bradyons, puisque le seul fait de voir constitue une interaction. Le mode d'interaction n'est pas pour autant déterminé, et nous ne le spécifierons pas davantage avant le chapitre VIII.

rimiter, d'élaborer des théories, etc., pour en arriver à des lois et à des théories qui rendent compte des processus supraluminaux. Il n'entre évidemment pas dans nos intentions d'employer cette méthode. Nous allons plutôt procéder analytiquement. Il va sans dire que la validité de nos résultats est sous-jacente à celle de nos hypothèses.

L'hypothèse de base qui nous guide dans la recherche de nos lois tachyoniques est toujours celle qui considère les tachyons comme des bradyons dans un référentiel supraluminal. L'outil mathématique dont nous allons nous servir est l'analyse tensorielle. On sait que les lois bradyoniques peuvent être exprimées au moyen de tenseurs sous les transformations de Lorentz. Supposons que ces quantités sont également des tenseurs sous les transformations supraluminales. Dès lors, par une propriété mathématique bien connue des tenseurs, les relations tensorielles qui étaient valables dans des référentiels subluminaires le seront aussi dans des référentiels supraluminaux. Ces relations supraluminales nous donneront justement l'ensemble des lois tachyoniques, consistantes bien sûr avec la transformation directe des trajectoires puisque obtenues directement des lois bradyoniques. Par ailleurs nous verrons que la méthode des transformations tensorielles introduit des hypothèses particulières quant aux caractères des particules et des champs supraluminaux.

Notre méthode de travail consiste donc essentiellement en la transformation mathématique de lois physiques de bradyons. Par conséquent on ne peut pas décrire, sans hypothèse supplémentaire, des interactions qui feraient intervenir et des bradyons et des tachyons. Aucune transformation ne peut en effet faire passer un ensemble de bradyons à un ensemble de bradyons et de tachyons. Cette dernière affirmation découle d'un des

résultats notés au cours des chapitres précédents, à savoir que la division des particules en sub- et supraluminales est la même (à l'interaction près) quel que soit le référentiel dans lequel on se place.

Quoique notre méthode ne puisse être directement appliquée à l'étude des interactions des tachyons et des bradyons, nous verrons que les résultats qu'elle donne au niveau des interactions des tachyons seuls fournissent plusieurs indications au sujet des premières. Ce sera d'ailleurs en partie le sujet du dernier chapitre.

C. Tenseurs de base et matrices de transformation

Avant signalé le rôle important que jouera l'analyse tensorielle dans notre travail, nous allons, dans cette section, formuler nos transformations supraluminales en langage tensoriel. Nous allons de plus dégager quelques propriétés de tenseurs particulièrement importants.

Reconsidérons nos deux référentiels Σ et Σ' . Si leur vitesse relative était subluminale, on sait que la quantité $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2$ serait invariante sous une transformation de Σ' à Σ (dans ce cas une transformation de Lorentz). Mais puisque leur vitesse relative est supraluminale, il est aisé de voir, en utilisant les inverses des relations (3.2), que cette quantité n'est pas invariante, mais qu'elle se transforme suivant l'équation

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = c^2 t^2 + y^2 + z^2 - x^2 \quad (4.1)$$

Nous voulons que (4.1), écrite en langage tensoriel, exprime l'invariance, sous une transformation supraluminale, du produit scalaire du 4-rayon vecteur par lui-même. Pour ce faire nous allons définir, dans Σ et Σ' , un ensemble de coordonnées covariantes X_λ et $(X_\lambda)'$ et de coordonnées contravariantes X^λ et $(X^\lambda)'$ telles que l'équation

$$\sum_{\lambda=1}^4 X_\lambda X^\lambda = \sum_{\lambda=1}^4 (X_\lambda)' (X^\lambda)' \quad (4.2)$$

soit équivalente à (4.1). On vérifie facilement que les coordonnées suivantes satisfont à cette exigence:

$$X^\lambda \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} \quad (4.3a)$$

$$X_\lambda \equiv \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} \quad (4.3b)$$

$$(X^\lambda)' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} \quad (4.3c)$$

$$(X_\lambda)' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ -ct' \end{bmatrix} \quad (4.3d)$$

Il peut sembler curieux à première vue que l'on définisse les coordonnées du 4-rayon vecteur de manière différente dans deux référentiels équivalents. N'avons-nous pas signalé, au chapitre III, que le principe de relativité est valable pour des transformations entre référentiels privilégiés? Le problème se résout cependant en remarquant que le mode de définition des coordonnées s'applique plus aux particules qu'elles

décrivent qu'au référentiel dans lequel on les utilise. Les coordonnées (4.3a) et (4.3b) décrivent des phénomènes mettant en jeu des tachyons tandis que (4.3c) et (4.3d) concernent les bradyons. La raison pour laquelle nous avons assigné les premières au référentiel Σ et les secondes à Σ' vient de ce qu'on a supposé, au début du chapitre, qu'il n'existe que des particules qui sont des bradyons dans Σ' et des tachyons dans Σ . Dans le cas plus général où les deux genres de particules existeraient dans chaque référentiel, nous y définirions les deux types de coordonnées, l'un décrivant particulièrement les tachyons et l'autre les bradyons. Sous les transformations supraluminales que nous allons bientôt mettre sous forme matricielle, le premier type de coordonnées se transforme dans le second et vice versa. Ceci a justement pour résultat que la description d'ensemble des phénomènes est invariante et que le principe de relativité est respecté. Nous aurons d'ailleurs l'occasion, dans un chapitre ultérieur, d'illustrer ce point plus en détail.

Définissons maintenant, au moyen des quantités introduites en (3.3b) et (3.3c), deux matrices symétriques 4 par 4 que nous désignerons par $\alpha_{\kappa\lambda}$ et $\beta_{\kappa\lambda}$:

$$\alpha_{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma\beta}{|\beta|} & 0 & 0 & \gamma|\beta| \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma|\beta| & 0 & 0 & \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$\beta_{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma\beta}{|\beta|} & 0 & 0 & \gamma|\beta| \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma|\beta| & 0 & 0 & \frac{-\gamma\beta}{|\beta|} \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

Alors on peut voir aisément que les transformations supraluminales (3.2) ou leurs inverses sont données par n'importe laquelle des quatre relations suivantes:

$$X^\kappa = \alpha_{\lambda\kappa} (X^\lambda)' \quad (4.5a) \qquad (X^\kappa)' = \beta_{\kappa\lambda} X^\lambda \quad (4.5b)$$

$$X_\kappa = \beta_{\lambda\kappa} (X_\lambda)' \quad (4.5c) \qquad (X_\kappa)' = \alpha_{\kappa\lambda} X_\lambda \quad (4.5d)$$

Il est à remarquer que dans les relations (4.5) nous avons utilisé la convention d'Einstein (i.e. l'on effectue une sommation de 1 à 4 sur tout indice répété), dont nous ferons usage du reste tout au cours de ce travail.

On peut passer de la représentation covariante à la représentation contrevariante, ou vice versa, par l'utilisation du tenseur métrique g , défini de façon que

$$X^\kappa = g^{\kappa\lambda} X_\lambda \quad (4.6)$$

d'où l'on trouve que

$$g^{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

On peut obtenir les composantes de ce tenseur dans Σ' en représentation doublement contrevariante en utilisant l'analogue de l'équation (4.5b) pour des tenseurs de second rang, i.e.

$$(g^{\kappa\lambda})' = \beta_{\kappa\mu} \beta_{\lambda\nu} g^{\mu\nu}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Comme on s'y attend, la représentation de $(g^{\kappa\lambda})'$ obtenue en (4.8) est consistante avec la relation suivante:

$$(X^\kappa)' = (g^{\kappa\lambda})' (X_\lambda)' \quad (4.9)$$

qui correspond dans Σ' à l'équation (4.6).

La représentation covariante du tenseur métrique peut être obtenue de façon analogue à celle utilisée en (4.6) et (4.9):

$$X_\kappa = g_{\kappa\lambda} X^\lambda \quad (4.10a) \quad (X_\kappa)' = (g_{\kappa\lambda})' (X^\lambda)' \quad (4.10b)$$

Il est aisé de vérifier que $g_{\kappa\lambda} = g^{\kappa\lambda}$ et que $(g_{\kappa\lambda})' = (g^{\kappa\lambda})'$. On remarque également, en considérant les équations (4.7) et (4.8), que le tenseur g est symétrique. D'autre part on peut voir de ces équations que la représentation de g n'est pas la même dans Σ et dans Σ' ; ou plutôt, pour parler plus correctement, le tenseur métrique pour les phé-

phénomènes tachyoniques n'est pas le même que celui des phénomènes bradyoniques.

Le tenseur g peut être utilisé pour élever ou abaisser les indices de n'importe quel tenseur. En particulier, il peut abaisser ses propres indices. On a par exemple, conformément à l'équation (4.10a):

$$g_k{}^\lambda = g_{k\mu} g^{\mu\lambda} \quad (4.11)$$

et l'on voit aisément que la représentation mixte du tenseur métrique n'est rien d'autre que le delta de Kronecker, résultat valable dans tout référentiel.

Introduisons, pour terminer cette section, le tenseur de quatrième rang totalement antisymétrique qui est habituellement désigné par ξ : nous le définissons de sorte que $(\xi^{\kappa\lambda\mu\nu})'$ égale +1 si κ, λ, μ et ν forment une permutation paire de 1, 2, 3 et 4, et -1 dans le cas contraire. On vérifie, en utilisant les transformations supraluminales (4.5) appliquées aux tenseurs de rang 4 de même que les formules (4.6), (4.9) et (4.10) d'élévation et d'abaissement des indices que

$$\xi_{\kappa\lambda\mu\nu} = -\xi^{\kappa\lambda\mu\nu} = -(\xi_{\kappa\lambda\mu\nu})' = (\xi^{\kappa\lambda\mu\nu})' \quad (4.12)$$

D. Le principe de réciprocité⁺

Les transformations supraluminales (3.2) présentent à première vue une certaine ressemblance avec les transformations de Lorentz (3.1). Seules diffèrent les valeurs des quantités U et w de même que la présence du facteur $\beta/|\beta|$ multipliant certains termes de (3.2). C'est donc dire qu'il n'est pas impossible que les tenseurs exprimés en coordonnées subluminales et supraluminales se ressemblent. Des analogies pourraient alors exister entre le comportement des tachyons et celui des bradyons. Nous allons ici donner quelques précisions formelles sur ces similitudes.

Considérons à nouveau nos deux référentiels Σ et Σ' , dont on se rappelle que Σ' se déplace, relativement à Σ , à une vitesse supraluminale U dirigée le long du corridor des tachyons. Introduisons un troisième référentiel, Σ'' , par rapport auquel Σ' se déplace à une vitesse subluminale $w = c^2/U$ dirigée elle aussi selon le corridor.⁺⁺ Si l'on pose

$$\beta = w/c = c/U = 1/\beta \quad (4.13)$$

alors on obtient, en utilisant les équations (3.3):

⁺Voir [80] pour une discussion de ce principe au niveau unidimensionnel.

⁺⁺Il est aisé de voir, en utilisant les équations (3.5), que la vitesse relative de Σ et Σ'' est infinie et dirigée selon le corridor.

$$\frac{\gamma\beta}{|\beta|} = \frac{\left(\frac{1}{|\beta|}\right)}{\left(\frac{1}{|\beta|}\right)\sqrt{\beta^2-1}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma^* \quad (4.14a)$$

$$\gamma|\beta| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|\beta|}\right)\sqrt{\beta^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma^* \quad (4.14b)$$

Donc, formellement, on peut écrire ainsi les matrices $\alpha_{\kappa\lambda}$ et $\beta_{\kappa\lambda}$ introduites en (4.4):

$$\alpha_{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} \beta\gamma^* & 0 & 0 & \gamma^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma^* & 0 & 0 & \beta\gamma^* \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$\beta_{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} -\beta\gamma^* & 0 & 0 & \gamma^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma^* & 0 & 0 & -\beta\gamma^* \end{bmatrix} \quad (4.15b)$$

D'autre part, on peut représenter les transformations de Lorentz (3.1) entre \hat{Z}' et \hat{Z}'' au moyen des coordonnées $(X_\lambda)'$ et $(X^\lambda)'$, de coordonnées $(X_\lambda)''$ et $(X^\lambda)''$ définies par analogie à (4.3c) et (4.3d) et de deux matrices $\alpha_{\kappa\lambda}^*$ et $\beta_{\kappa\lambda}^*$ telles que

$$\alpha_{\kappa\lambda}^* \equiv \begin{bmatrix} \gamma^* & 0 & 0 & \beta\gamma^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma^* & 0 & 0 & \gamma^* \end{bmatrix} \quad (4.16a)$$

$$\beta_{\kappa\lambda}^* = \begin{bmatrix} \gamma^* & 0 & 0 & -E\gamma^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -E\gamma^* & 0 & 0 & \gamma^* \end{bmatrix} \quad (4.16b)$$

Utilisant tout ce bagage, on obtient les transformations (3.1) par l'une ou l'autre des équations suivantes:

$$(X^\kappa)'' = \alpha_{\lambda\kappa}^* (X^\lambda)' \quad (4.17a) \quad (X_\kappa)'' = \beta_{\lambda\kappa}^* (X_\lambda)' \quad (4.17b)$$

La similitude entre les matrices de transformations sub- et supraluminales (4.15) et (4.16) est frappante, les différences ne se situant que dans la permutation de quelques éléments. De fait si l'on introduit une matrice $\mu_{\kappa\lambda}$ définie par

$$\mu_{\kappa\lambda} = \mu_{\kappa\lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

alors les relations entre les deux groupes de matrices sont exprimées par

$$\alpha_{\kappa\lambda}^* \mu_{\lambda\omega} = \mu_{\kappa\lambda} \alpha_{\lambda\omega}^* = \alpha_{\kappa\omega} \quad (4.19a)$$

$$\beta_{\kappa\lambda}^* \mu_{\lambda\omega} = \mu_{\kappa\lambda} \beta_{\lambda\omega}^* = \beta_{\kappa\omega} \quad (4.19b)$$

La signification de ces équations est claire. La matrice $\mu_{\kappa\lambda}$

interchange certaines composantes d'un tenseur. Si, par exemple, elle multiplie le 4-rayon vecteur, elle substitue λ à λ^t et vice versa. Avec les équations (4.19), cela implique qu'une transformation de tenseurs entre deux référentiels à vitesse relative U est la même chose qu'une transformation, avec permutation de composantes, de ces tenseurs entre deux référentiels à vitesse relative λ^2/U . Cela signifie que toute relation entre des tenseurs dans un référentiel supraluminal fournit les mêmes équations entre composantes que la relation entre ces tenseurs dans le référentiel subluminal correspondant.

Nous désignerons cette équivalence formelle par "principe de réciprocité". A plusieurs reprises nous aurons l'occasion d'en approfondir la signification physique.

CHAPITRE V

DYNAMIQUE SUPRALUMINALE

A. 4-vecteur impulsion d'un tachyon

Supposons qu'une particule de masse propre m_0 se déplace, dans notre référentiel Σ' , à une vitesse subluminaire \vec{u}' égale à $u'_x \hat{i} + u'_y \hat{j} + u'_z \hat{k}$. Il est bien connu qu'en mécanique relativiste, l'énergie et l'impulsion d'une telle particule forment un quadrivecteur sous les transformations de Lorentz. Dans Σ' ses composantes sont explicitement données par

$$(p^\kappa)' \equiv \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ E'/c \end{bmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}} \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \\ c \end{bmatrix} = m_0 (U^\kappa)' \quad (5.1)$$

où nous avons également introduit le 4-vecteur $(U^\kappa)'$.

Si l'on suppose que $(p^\kappa)'$ est également un 4-vecteur sous les

transformations supraluminales et si l'on utilise les équations (4.5a) des transformations tensorielles supraluminales, alors on obtient la valeur des composantes de p^κ dans Σ :

$$p^\kappa = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\mu'/c)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \mu'_x + \gamma|\nu| & \mu'_y & \mu'_z \\ \frac{\gamma\beta}{|\beta|} c + \gamma|\beta| \mu'_x & & \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Quoique l'équation (5.2) nous fournisse les composantes du 4-vec-teur impulsion dans le référentiel Σ , elles y sont encore exprimées en fonction des paramètres μ' , μ'_x , μ'_y , μ'_z , directement reliés à Σ' . Nous voudrions bien les réduire à des paramètres reliés à Σ . Pour ce faire, nous utiliserons les équations de transformation des vitesses.

Nous avons donné en (3.5) les composantes μ_x , μ_y et μ_z de la vitesse d'une particule supraluminale dans Σ en fonction des composantes μ'_x , μ'_y et μ'_z de sa vitesse dans Σ' . Ici nous avons plutôt besoin des inverses des équations (3.5), c'est-à-dire de μ'_x , μ'_y et μ'_z en fonction de μ_x , μ_y et μ_z . Il est aisé de vérifier que l'inversion de (3.5) donne:

$$\mu'_x = \frac{\mu_x - \nu}{1 - \frac{\nu \mu_x}{c^2}} \quad (5.3a)$$

$$\mu'_y = \frac{\mu_y}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[\frac{\nu \mu_x}{c^2} - 1 \right]} \quad (5.3b)$$

$$\mu_z' = \frac{\mu_z}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[\frac{\nu\mu_x}{\mathcal{L}^2} - 1 \right]} \quad (5.3c)$$

Comme on s'y attendait, la relation fonctionnelle de μ_x' , μ_y' et μ_z' à μ_x , μ_y et μ_z est la même que celle de μ_x , μ_y et μ_z à μ_x' , μ_y' et μ_z' , à ceci près que ν et β y changent de signe.

Après utilisation de (5.3), la quantité sous radical dans l'équation (5.2) devient

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{\mu'}{\mathcal{L}} \right)^2 &\equiv 1 - \frac{(\mu_x')^2 + (\mu_y')^2 + (\mu_z')^2}{\mathcal{L}^2} \\ &= \left[\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - \mathcal{L}^2}{\mathcal{L}^2} \right] \left[\frac{1}{\gamma^2} \right] \left[\frac{\nu\mu_x}{\mathcal{L}^2} - 1 \right]^{-2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'inverse de la racine carrée positive de cette expression est donné par

$$\left[1 - \left(\frac{\mu'}{\mathcal{L}} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left[\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - \mathcal{L}^2}{\mathcal{L}^2} \right]^{-1/2} \gamma \left[\frac{\nu\mu_x}{\mathcal{L}^2} - 1 \right] \left[\frac{\nu\mu_x}{|\nu\mu_x|} \right] \quad (5.5)$$

le dernier facteur du membre de droite n'étant qu'un facteur de signe. Nous l'avons introduit parce que le signe de l'expression entre crochets située à sa gauche n'est pas toujours positif mais est déterminé par la quantité $\nu\mu_x$ (on se rappelle que les valeurs absolues de ν et de μ_x sont toutes deux supérieures à \mathcal{L}). Le produit de l'expression entre crochets et du facteur de signe, par contre, est bel et bien positif,

comme il se doit de l'être eu égard au membre de gauche.

Il ne nous manque plus rien maintenant pour écrire l'équation (5.2) en fonction des composantes de la vitesse de la particule dans le référentiel Σ . Substituant (5.3) et (5.5) dans (5.2), on obtient:

$$p^k \equiv \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E/c \end{bmatrix} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}}} \frac{\mu_x}{|\mu_x|} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \\ c \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Examinons quelque peu l'équation (5.6). On remarque que la première composante du 4-vecteur impulsion d'un tachyon est toujours positive, tandis que la quatrième a le signe de μ_x . Pour un bradyon, on sait que la situation est exactement contraire. Cette différence est reliée à ce que nous avons signalé au cours du chapitre précédent, en rapport avec le principe de réciprocité, c'est-à-dire la similitude entre transformations subluminales et transformations supraluminales avec permutation de composantes.

D'autre part, la relation (5.6) ne nous force aucunement, contrairement à l'équation (1.1), à introduire quelque quantité imaginaire. L'expression sous radical n'est jamais négative, comme on peut s'en rendre compte par l'équation (3.6). Puisque les tachyons sont des bradyons dans un référentiel supraluminal il est naturel, comme nous le faisons avec m_0 , de caractériser leurs propriétés intrinsèques par les mêmes paramètres dans les deux genres de référentiels.

Incidentement on peut donner à la masse propre une interprétation fort simple sans avoir recours au référentiel dans lequel la particule est immobile. On sait que dans ce dernier elle coïncide avec l'énergie de la particule exprimée dans un système d'unités où \mathcal{L} vaut 1. Considérons l'équation (5.6): nous remarquons que la masse propre correspond (dans le système d'unités susmentionné) à la composante \vec{p}_μ de l'impulsion de la particule lorsque celle-ci se déplace à vitesse infinie le long du corridor des tachyons.

B. Transformation de la force; force de Minkowski

Revenons à notre particule de masse propre \mathcal{M} . qui, dans \mathcal{L}' , se déplace à une vitesse \vec{u}' . Si une force \vec{f}' agit sur elle, son énergie et son impulsion varient suivant les équations bien connues

$$\vec{f}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \quad (5.7a)$$

$$\vec{f}' \cdot \vec{u}' = \frac{d\epsilon'}{dt'} \quad (5.7b)$$

Relativement à \mathcal{L} , notre particule est un tachyon. Son énergie et son impulsion dans ce référentiel varient, bien sûr, avec le temps conformément à la transformation des variations correspondantes dans \mathcal{L}' . Identifions à une force \vec{f} , dans \mathcal{L} , la dérivée temporelle de l'impulsion, selon l'équation

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.8)$$

Nous allons chercher les relations qui existent entre les composantes de \vec{f} et celles de \vec{f}' .

Considérons d'abord la composante f_x . Selon les règles de différentiation, on obtient:

$$f_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \left[\frac{d}{dt'} (p_x) \right] \left[\frac{d}{dt'} (t) \right]^{-1} \quad (5.9)$$

Exprimant, au moyen des transformations quadri-vectorielles supraluminales (4.5a), p_x en fonction de p'_x et E' et t en fonction de t' et x' et substituant dans (5.9), on trouve:

$$f_x = \left[\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{v}{c^2} \frac{dE'}{dt'} \right) \right] \left[\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left(1 + \frac{v\mu'_x}{c^2} \right) \right]^{-1} \quad (5.10)$$

ce qui donne, après utilisation de (5.7) et réarrangement:

$$f_x = f'_x + \frac{v (f'_y \mu'_y + f'_z \mu'_z)}{c^2 + v \mu'_x} \quad (5.11a)$$

De la même façon on obtient, quant aux composantes f_y et f_z :

$$f_y = \frac{f'_y}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[1 + \frac{v\mu'_x}{c^2} \right]} \quad (5.11b)$$

$$f_z = \frac{f'_z}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[1 + \frac{v\mu'_x}{c^2} \right]} \quad (5.11c)$$

Cherchons maintenant, parallèlement à l'équation (5.7b), la va-

leur de l'expression $\frac{dE}{dt}$ en fonction de \vec{f}' et \vec{u}' . Pour ce faire, partons de l'équation

$$-p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (5.12)$$

qui provient de l'invariance de la quantité $p_k p^k$ et du fait qu'elle vaut évidemment $-m_0^2 c^2$ dans le référentiel où la particule est immobile. Différentiant (5.12) par rapport au temps et réarrangeant, nous obtenons:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \left[p_x \frac{dp_x}{dt} - p_y \frac{dp_y}{dt} - p_z \frac{dp_z}{dt} \right] \quad (5.13)$$

par quoi l'on trouve, en utilisant la définition (5.8) de la force supraluminale et la représentation explicite de p_x , p_y , p_z et E telle que donnée en (5.6):

$$\frac{dE}{dt} = f_x \mu_x - f_y \mu_y - f_z \mu_z \quad (5.14)$$

Introduisons maintenant dans \hat{Z}' le quadrivecteur, ordinairement appelé force de Minkowski et noté $(F^k)'$, formé en différentiant par rapport à son temps propre le 4-vecteur impulsion d'un bradyon. Nous souvenant que le temps propre infinitésimal d'un bradyon de vitesse u' est donné par⁺

⁺Voir l'équation (3,1) de [37], où les notations sont toutefois

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - \left(\frac{u'}{c}\right)^2} \quad (5.15)$$

on obtient, en utilisant les équations dynamiques (5.7):

$$(F^k)' = \frac{d(p^k)'}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u'}{c}\right)^2}} \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \\ \frac{1}{c} \vec{f}' \cdot \vec{u}' \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Pour obtenir la force de Minkowski d'un tachyon dans Σ , on doit d'abord exprimer $d\tau$ dans ce référentiel. Substituant dans (5.15) la transformation de dt' telle que donnée en (4.5b) et utilisant (5.5), nous obtenons:

$$d\tau = dt \frac{u_x}{|u_x|} \sqrt{\frac{u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 - c^2}{c^2}} \quad (5.17)$$

qui, jointe à (5.14) et (5.8), nous donne:

$$F^k = \frac{dp^k}{d\tau} = \frac{u_x / |u_x|}{\sqrt{\frac{u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 - c^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \frac{1}{c} (f_x u_x - f_y u_y - f_z u_z) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

quelque peu différentes des nôtres. Nous prions le lecteur de s'attendre dorénavant à de telles différences, même si nous ne les lui signalons plus.

Pour clore cette section nous allons donner, au moyen des transformations quadrivectorielles de la force de Minkowski, les relations inverses de (5.16). Selon les équations (4.5b) on a, pour $(F^1)'$:

$$(F^1)' = \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [-F^1 + \beta F^4] \quad (5.19)$$

Substituant dans (5.19) les expressions de $(F^1)'$, F^1 et F^4 données en (5.16) et (5.18) et utilisant (5.5), on obtient:

$$f'_x = f_x - \frac{v (f_y \mu_y + f_z \mu_z)}{v \mu_x - c^2} \quad (5.20a)$$

Procédant de façon analogue, on trouve pour les deux autres composantes:

$$f'_y = \frac{f_y}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[\frac{v \mu_x}{c^2} - 1 \right]} \quad (5.20b)$$

$$f'_z = \frac{f_z}{\frac{\gamma\beta}{|\beta|} \left[\frac{v \mu_x}{c^2} - 1 \right]} \quad (5.20c)$$

Il est à remarquer qu'on ne peut pas obtenir la dépendance fonctionnelle de f'_x , f'_y et f'_z sur f_x , f_y et f_z (telle que donnée en (5.20)) à partir de celle de f_x , f_y et f_z sur f'_x , f'_y et f'_z (telle que donnée en (5.11)) en changeant v , β par $-v$, $-\beta$ et μ'_x , μ'_y et μ'_z par μ_x , μ_y et μ_z . Cela provient du fait que la relation fonctionnelle de F^k à f_x , f_y et f_z n'est pas la même que celle de $(F^k)'$ à f'_x , f'_y et f'_z , comme on le remarque aisément dans les expressions (5.16) et (5.18).

C. Lagrangien et hamiltonien d'une particule libre

Considérons, du point de vue du référentiel Σ' , un bradyon qui n'est soumis à aucune force et qui se déplace d'un point P_1 à un point P_2 de l'espace quadridimensionnel. On sait que sa trajectoire est telle qu'elle minimise l'intégrale suivante:⁺

$$\int_{P_1}^{P_2} -m_0 c^2 d\tau \quad (5.21)$$

Si l'on exprime $d\tau$ dans les coordonnées d'un référentiel quelconque, il est bien entendu que la valeur de l'intégrale, calculée le long de n'importe quelle trajectoire, ne dépend pas du référentiel dans lequel on se place pour la calculer. Le processus de minimisation en jeu dans la détermination de la trajectoire est donc, lui aussi, indépendant du référentiel, que ce dernier soit sub- ou supraluminal.

Exprimée en fonction des coordonnées de Σ , l'intégrale peut s'écrire (pourvu que $dt \neq 0$)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-m_0 c^2 \frac{d\tau}{dt} \right] dt \quad (5.22)$$

et, par analogie au cas subluminal, nous appellerons lagrangien, et désignerons par L , la quantité entre crochets dans l'expression (5.22). Utilisant l'équation (5.17) pour $d\tau/dt$, on peut écrire le lagrangien com-

⁺Voir [37], chapitre II, section 8.

me suit:

$$L = -m_0 c^2 \frac{\mu_x}{|\mu_x|} \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}} \quad (5.23)$$

A partir de cette expression on peut définir, toujours comme dans le cas subluminal, des moments canoniques P_x , P_y et P_z tels que

$$P_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \mu_x} = -m_0 \frac{\mu_x}{|\mu_x|} \left[\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2} \right]^{-1/2} = -p_x \quad (5.24a)^+$$

$$P_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \mu_y} = +m_0 \frac{\mu_x}{|\mu_x|} \mu_y \left[\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2} \right]^{-1/2} = p_y \quad (5.24b)$$

$$P_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \mu_z} = +m_0 \frac{\mu_x}{|\mu_x|} \mu_z \left[\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2} \right]^{-1/2} = p_z \quad (5.24c)$$

où nous avons utilisé les expressions de p_x , p_y et p_z données en (5.6).

On sait que la minimisation de l'intégrale (5.22) est équivalente à des équations dites d'Euler-Lagrange, du type

⁺Dans la différentiation de L par rapport à μ_x , nous traitons le facteur de signe $\mu_x/|\mu_x|$ comme une constante. Formellement rien ne nous en empêche, puisque μ_x , étant supraluminale, ne s'annule jamais.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mu_i} = 0 \quad (5.25)$$

où i représente successivement x , y et z . Substituant (5.23) et (5.24) dans (5.25), on obtient:

$$\frac{d}{dt} (-p_x) = \frac{d}{dt} (p_y) = \frac{d}{dt} (p_z) = 0 \quad (5.26)$$

ce qui signifie que les composantes de l'impulsion de notre particule restent constantes dans le temps, ce à quoi on s'attendait, bien sûr, puisque la particule est libre. Il est à remarquer qu'on aurait pu déduire d'un coup d'oeil sur le lagrangien (5.23) que les moments canoniques étaient conservés, puisque ce lagrangien ne dépend pas explicitement des coordonnées x , y , z , i.e. ces coordonnées sont ignorables.

Toujours par analogie au cas subluminal nous allons définir maintenant l'hamiltonien H de notre particule supraluminale:

$$H \equiv p_x \mu_x + p_y \mu_y + p_z \mu_z - L \quad (5.27)$$

La substitution des moments canoniques (5.24) et du lagrangien (5.23) dans la relation (5.27) nous donne:

$$H = -m_0 c^2 \frac{\mu_x}{|\mu_x|} \sqrt{\frac{1}{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}}} = -E \quad (5.28)$$

où nous avons utilisé l'expression de E donnée en (5.6). Dans (5.28)

cependant, H n'est pas encore exprimé en fonction des moments canoniques. Pour y arriver, notons qu'en vertu de (5.12) on peut écrire E comme suit:

$$E = \kappa \frac{\mu_{\kappa}}{|\mu_{\kappa}|} \sqrt{p_{\kappa}^2 - p_y^2 - p_z^2 - \kappa^2 \mu_0^2} \quad (5.29)$$

où le facteur de signe est introduit avec l'extraction de la racine carrée, pour que (5.29) corresponde bel et bien à (5.6). Substituant maintenant, dans (5.29), les équations (5.24) qui relient les moments canoniques aux composantes de l'impulsion, et utilisant (5.28), on obtient notre résultat:

$$H = -E = -\kappa \frac{\mu_{\kappa}}{|\mu_{\kappa}|} \sqrt{P_{\kappa}^2 - P_y^2 - P_z^2 - \mu_0^2 \kappa^2} \quad (5.30)^+$$

Il est aisé de vérifier que les six équations de Hamilton que l'on peut tirer de (5.30) correspondent respectivement aux trois équations de Lagrange (5.25) et aux trois équations (5.24) définissant les moments canoniques. A cause de la validité des équations de Hamilton, nous pouvons effectuer des transformations canoniques sur nos variables. Considérons par exemple la transformation des variables $\kappa, y, z, P_{\kappa}, P_y, P_z$ aux variables $q, \eta, \Delta, P_q, P_{\eta}, P_{\Delta}$, générée par une fonction du type

⁺ La présence du facteur $\mu_{\kappa}/|\mu_{\kappa}|$ dans l'hamiltonien (qu'on voulait exprimer en fonction des moments canoniques seuls) ne pose aucun problème: nous avons signalé que ce facteur est constant dans les différentiations.

$$F = \kappa P_0 + y P_1 + z P_2 + \varepsilon G(\kappa, y, z, P_0, P_1, P_2) \quad (5.31)$$

où ε est une constante infinitésimale et G une fonction des variables entre parenthèses. On peut alors montrer que d'intéressantes transformations résultent de certains choix de G ⁺ : si $G = H$, la fonction F génère une transformation qui correspond au changement effectif des coordonnées et des moments au cours d'un intervalle de temps $dt = \varepsilon$; si $G = P_i$ ($i = \kappa, y, z$), F génère une transformation de la seule variable i , telle que $\delta i = \varepsilon$. En conclusion, H , P_κ , P_y et P_z génèrent respectivement des transformations canoniques infinitésimales selon t , κ , y et z . Cette propriété, la plus générale de l'hamiltonien et des moments canoniques, justifie l'appellation que nous leur avons donnée jusqu'à maintenant.

D. Variables réciproques

Il existe une autre façon de présenter les résultats que nous avons obtenus jusqu'à maintenant dans ce chapitre. Elle met en relief une ressemblance particulière entre les variables dynamiques caractérisant les tachyons et celles qui caractérisent les bradyons.

Considérons tout d'abord le 4-vecteur impulsion d'un tachyon donné en (5.6). Ses composantes y sont exprimées en fonction des composantes

⁺ Voir [31], chapitre VIII, section 6.

tridimensionnelles μ_x , μ_y et μ_z de la vitesse de la particule. Nous allons maintenant les exprimer en fonction de trois nouvelles quantités \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z et \mathcal{E}_{xt} , définies par

$$\mathcal{E}_y = \frac{\kappa \mu_y}{\mu_x} \quad (5.32a) \quad \mathcal{E}_z = \frac{\kappa \mu_z}{\mu_x} \quad (5.32b) \quad \mathcal{E}_{xt} = \frac{\kappa^2}{\mu_x} \quad (5.32c)$$

Renversant (5.32), nous obtenons les relations

$$\mu_x = \frac{\kappa^2}{\mathcal{E}_{xt}} \quad (5.33a) \quad \mu_y = \kappa \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_{xt}} \quad (5.33b) \quad \mu_z = \kappa \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}_{xt}} \quad (5.33c)$$

qui, substituées dans (5.6), nous donnent:

$$p^\kappa = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2 + \mathcal{E}_{xt}^2}{\kappa^2}}} \begin{bmatrix} \kappa \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \\ \mathcal{E}_{xt} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

La ressemblance entre cette forme du 4-vecteur impulsion d'un tachyon et la forme (5.1) de celui d'un bradyon est assez forte.

Il est facile de dégager la signification physique des quantités \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z et \mathcal{E}_{xt} . D'ordinaire on exprime la trajectoire spatio-temporelle d'une particule en donnant ses coordonnées spatiales x , y et z en fonction du paramètre τ . Les dérivées de x , y et z par rapport à τ forment alors les composantes de la vitesse de la particule. Si on utilise (5.32), on obtient:

$$\mathcal{P}_y = \mathcal{L} \frac{\mu_y}{\mu_\kappa} = \mathcal{L} \frac{dy/dt}{d\kappa/dt} = \mathcal{L} \frac{dy}{d\kappa} \quad (5.35a)$$

$$\mathcal{P}_z = \mathcal{L} \frac{\mu_z}{\mu_\kappa} = \mathcal{L} \frac{dz/dt}{d\kappa/dt} = \mathcal{L} \frac{dz}{d\kappa} \quad (5.35b)$$

$$\mathcal{P}_{\kappa t} = \frac{\mathcal{L}^2}{\mu_\kappa} = \frac{\mathcal{L}}{d\kappa/d(\kappa t)} = \mathcal{L} \frac{d(\kappa t)}{d\kappa} \quad (5.35c)$$

Donc si nous choisissons κ (et non plus t) comme paramètre de la trajectoire, \mathcal{P}_y , \mathcal{P}_z et $\mathcal{P}_{\kappa t}$ ne sont rien d'autre que les dérivées (multipliées par \mathcal{L}) de y , z et κt par rapport à κ . Les trois quantités \mathcal{P}_y , \mathcal{P}_z et $\mathcal{P}_{\kappa t}$ sont les composantes, dans l'espace y - z - κt , d'un vecteur que nous pouvons appeler vitesse réciproque.

Notons immédiatement, pour fin d'application ultérieure, qu'en vertu de la définition (5.32) et de la propriété (3.6), la vitesse réciproque satisfait à l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &\equiv \mathcal{P}_y^2 + \mathcal{P}_z^2 + \mathcal{P}_{\kappa t}^2 \\ &= \frac{\mathcal{L}^2}{\mu_\kappa^2} \left[\mu_y^2 + \mu_z^2 + \mathcal{L}^2 \right] \leq \mathcal{L}^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nous avons représenté la force de Minkowski supraluminale au moyen de l'équation (5.18). Ici aussi il est possible de lui donner une forme qui ressemble davantage à l'expression (5.16) de la force de Min-

kowski subluminale. Pour ce faire, écrivons d'abord le temps propre (5.17) en fonction des composantes de la vitesse réciproque, c'est-à-dire en substituant (5.33) dans (5.17). Nous obtenons ainsi:

$$d\tau = \frac{d\kappa}{c} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{c^2}} \quad (5.37)$$

ce qui donne, pour la force de Minkowski:

$$F^\kappa \equiv \frac{dp^\kappa}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} c \, dp_x/d\kappa \\ c \, dp_y/d\kappa \\ c \, dp_z/d\kappa \\ dE/d\kappa \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

La ressemblance avec l'expression subluminale correspondante se révèle davantage si l'on définit, dans l'espace tridimensionnel $y-z-ct$, un vecteur $\vec{\mathcal{F}}$ de composantes

$$\mathcal{F}_y = c \frac{dp_y}{d\kappa} \quad (5.39a) \quad \mathcal{F}_z = c \frac{dp_z}{d\kappa} \quad (5.39b) \quad \mathcal{F}_{ct} = \frac{dE}{d\kappa} \quad (5.39c)$$

et si l'on note, en différentiant l'expression invariante (5.12) par rapport à κ et en utilisant la forme explicite (5.34) de β^κ , que

$$c \frac{d\beta_\kappa}{d\kappa} = \frac{1}{c} \left[\mathcal{F}_y \beta_y + \mathcal{F}_z \beta_z + \mathcal{F}_{ct} \beta_{ct} \right] = \frac{\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\beta}}{c} \quad (5.40)$$

La substitution de (5.40) et (5.39) dans (5.38) donne ainsi:

$$F^{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{S}^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} \vec{F} \cdot \vec{S} / c \\ \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_{ct} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

que l'on peut rapprocher de (5.16).

Les variables réciproques peuvent également être introduites au niveau de la formulation analytique de la mécanique d'une particule. C'est ce que nous allons faire en terminant ce chapitre.

Nous avons commencé la section précédente en écrivant l'intégrale (5.21) au moyen de l'expression (5.22). Nous allons maintenant procéder de façon quelque peu différente. Pour ce faire, écrivons (5.21) comme suit (pourvu que $d\kappa \neq 0$):

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \left[-m_0 c^3 \frac{d\tau}{d\kappa} \right] \frac{d\kappa}{c} \quad (5.42)$$

Contrairement à ce que nous avons fait en (5.22), nous choisissons κ , ici, comme paramètre de la trajectoire. Pour une particule supraluminale, le choix de κ est plus naturel que celui de τ puisque, comme nous l'avons déjà signalé, c'est l'accroissement de κ plutôt que celui de τ qui détermine la direction du transfert d'information par les tachyons.

Appelons lagrangien réciproque, et désignons par L_{κ} , la quan-

tité entre crochets dans l'expression (5.42). Utilisant l'expression (5.37) pour $d\tau$, nous obtenons:

$$L_n = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{b_y^2 + b_z^2 + b_{ct}^2}{c^2}} \quad (5.43)$$

A partir de ce lagrangien réciproque, nous pouvons définir des moments canoniques réciproques P_{ny} , P_{nz} et P_{nct} tels que

$$P_{ny} \equiv \frac{\partial L_n}{\partial b_y} = m_0 b_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b_y^2 + b_z^2 + b_{ct}^2}{c^2}}} = p_y \quad (5.44a)$$

$$P_{nz} \equiv \frac{\partial L_n}{\partial b_z} = m_0 b_z \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b_y^2 + b_z^2 + b_{ct}^2}{c^2}}} = p_z \quad (5.44b)$$

$$P_{nct} \equiv \frac{\partial L_n}{\partial b_{ct}} = m_0 b_{ct} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b_y^2 + b_z^2 + b_{ct}^2}{c^2}}} = \frac{\tilde{E}}{c} \quad (5.44c)$$

où nous avons utilisé l'expression (5.34) de β^k en fonction des composantes de la vitesse réciproque. Nous pouvons également définir, poursuivant ce que nous venons de faire, un hamiltonien réciproque H_n :

$$\begin{aligned} H_n &\equiv P_{ny} b_y + P_{nz} b_z + P_{nct} b_{ct} - L_n \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - b^2/c^2}} = c p_n \end{aligned} \quad (5.45)$$

où nous avons utilisé (5.34) et (5.44). Substituant dans (5.45) la valeur de \dot{p}_κ donnée en (5.12) et utilisant après coup (5.44), nous obtenons H_Λ en fonction des moments canoniques réciproques:

$$H_\Lambda = c \sqrt{p_{\Lambda y}^2 + p_{\Lambda z}^2 + p_{\Lambda t}^2 + m_0^2 c^2} \quad (5.46)$$

Revenons quelque peu en arrière et rappelons-nous que la minimisation de l'intégrale (5.42) implique les équations d'Euler-Lagrange correspondantes dont l'une, par exemple, est donnée par

$$\frac{d}{d\kappa} \left(\frac{\partial L_\Lambda}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L_\Lambda}{\partial y} = 0 \quad (5.47)$$

qui devient, après utilisation de (5.43) et (5.44)

$$\frac{d}{d\kappa} (p_y) = 0 \quad (5.48)$$

Les deux autres équations d'Euler-Lagrange fournissent, pour \dot{p}_z et E , des relations semblables à (5.48).

L'équation (5.48) nous dit que la composante \dot{p}_y de l'impulsion de notre particule supraluminale est constante. Mais attention! Elle est constante sous un changement de κ .⁺ (5.48) ne nous dit pas direc-

⁺ Nous pouvons voir que \dot{p}_y est constante sous un changement de κ d'une autre manière: y est coordonnée ignorable dans le lagrangien réci-

tement qu'elle est aussi constante sous un changement de t .

Pourtant nous avons vu auparavant (équation (5.26)) que \dot{p}_y est bel et bien constante sous un changement de t . Nous voilà donc pris avec deux genres de lois de conservation: les unes selon t , et les autres selon κ . Bien sûr cependant, notre résultat n'est prouvé que dans le cas d'une particule supraluminale libre. Au chapitre VII, nous considérerons ce problème de manière plus approfondie. Dans le cas général des phénomènes supraluminiaux, nous n'affirmerons la validité que des lois de conservation selon κ .

proque (5.43). Donc \mathcal{P}_{ny} (égal à \dot{p}_y) est conservé. Mais puisque l'on intègre le lagrangien réciproque selon κ plutôt que selon t (voir l'équation (5.42)), le moment canonique est conservé selon κ .

CHAPITRE VI

CHAMP ELECTROMAGNETIQUE SUPRALUMINAL

Nous avons consacré le chapitre précédent à la caractérisation de l'état dynamique d'une particule supraluminale. Nous nous sommes arrêtés, entre autres choses, à considérer son énergie, son impulsion, son lagrangien, etc. Nous allons maintenant décrire le champ électromagnétique supraluminal et dégager les relations auxquelles il satisfait.

A. Le 4-vecteur courant et le tenseur du champ électromagnétique

Considérons, du point de vue du référentiel Σ' , une distribution continue de charge et de courant caractérisée par les quantités ρ' et \vec{j}' . Appelons \vec{E}' et \vec{B}' les champs électrique et magnétique produits par cette distribution. Il est bien connu que les quantités $(j^\kappa)'$ et $(F^{\kappa\lambda})'$, définies par

$$(J^k)' \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c} \begin{bmatrix} J'_x \\ J'_y \\ J'_z \\ c \rho' \end{bmatrix} \quad (6.1a)$$

$$(F^{\kappa\lambda})' \equiv \begin{bmatrix} 0 & E'_z & -E'_y & c B'_x \\ -E'_z & 0 & E'_x & c B'_y \\ E'_y & -E'_x & 0 & c B'_z \\ -c B'_x & -c B'_y & -c B'_z & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1b)$$

constituent respectivement un 4-vecteur et un tenseur contrevariants sous les transformations de Lorentz. Supposons qu'ils conservent ces propriétés sous les transformations supraluminales; nous pouvons alors obtenir, en utilisant les équations (4.5a) et (6.1), les composantes supraluminales du 4-courant et du tenseur du champ électromagnétique:

$$J^k \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ c \rho \end{bmatrix} = \alpha_{\lambda k} (J^\lambda)' = \frac{1}{\epsilon_0 c} \begin{bmatrix} \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [J'_x + v \rho'] \\ J'_y \\ J'_z \\ \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [\beta J'_x + c \rho'] \end{bmatrix} \quad (6.2a)$$

$$F^{\kappa\lambda} \equiv \begin{bmatrix} 0 & E_z & -E_y & c B_x \\ -E_z & 0 & E_x & c B_y \\ E_y & -E_x & 0 & c B_z \\ -c B_x & -c B_y & -c B_z & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{\mu\kappa} \alpha_{\omega\lambda} (F^{\mu\nu})' = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [E'_z - v B'_y] & \dots & \dots \\ \frac{-\gamma\beta}{|\beta|} [E'_z - v B'_y] & 0 & \dots & \dots \\ \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [E'_y + v B'_z] & -E'_x & \dots & \dots \\ \kappa B'_x & \frac{-\gamma\beta}{|\beta|} [B'_y - \frac{v E'_z}{\kappa^2}] & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \frac{-\gamma\beta}{|\beta|} [E'_y + v B'_z] & -\kappa B'_x & \dots & \dots \\ E'_x & \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [B'_y - \frac{v E'_z}{\kappa^2}] & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\gamma\beta}{|\beta|} [B'_z + \frac{v E'_y}{\kappa^2}] & \dots & \dots \\ \frac{-\gamma\beta}{|\beta|} [B'_z + \frac{v E'_y}{\kappa^2}] & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.2b)
\end{aligned}$$

Il ne faudrait pas conclure que les champs \vec{E} et \vec{B} , produits par des tachyons (i.e. par des densités de charge et de courant tachyoniques), sont strictement semblables aux champs électrique et magnétique produits par des bradyons. Nous verrons, à la section suivante, que les relations différentielles entre les sources et les champs supraluminiaux ne sont pas identiques aux relations différentielles entre sources et champs subluminaux. Nous avons d'ailleurs signalé que, puisque notre méthode de travail consiste à transformer des lois physiques de bradyons, on ne peut directement l'appliquer à des phénomènes mettant en jeu et des bradyons, et des tachyons. Dire, par exemple, qu'un champ électromagnétique produit par des tachyons agit sur les bradyons selon la force de Lorentz dépasse les hypothèses que nous avons posées jusqu'à présent. Si on la soutient, cette affirmation doit être élevée au rang de postulat.

Pour fin d'application ultérieure, introduisons un tenseur dual

de $(F^{\kappa\lambda})'$, selon l'équation

$$(G_{\kappa\lambda})' = \frac{-1}{2} (\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu})' (F^{\mu\nu})' \quad (6.3)$$

Il est aisé de vérifier, par l'utilisation des équations (4.12) et (6.1) ainsi que de la définition de ε que $(G_{\kappa\lambda})'$ est donné par

$$(G_{\kappa\lambda})' = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon B_z' & -\varepsilon B_y' & E_x' \\ -\varepsilon B_z' & 0 & \varepsilon B_x' & E_y' \\ +\varepsilon B_y' & -\varepsilon B_x' & 0 & E_z' \\ -E_x' & -E_y' & -E_z' & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4a)$$

Pour obtenir $G_{\kappa\lambda}$, on peut partir de l'équation (6.3) exprimée dans Σ ou, de façon équivalente, transformer $(G_{\kappa\lambda})'$ au moyen de (4.5c) et utiliser les relations (6.2b) entre champs subluminaires et champs supraluminaires.

De toute manière, on trouve:

$$G_{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon B_z & \varepsilon B_y & -E_x \\ \varepsilon B_z & 0 & -\varepsilon B_x & -E_y \\ -\varepsilon B_y & \varepsilon B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4b)^+$$

⁺ Le fait que les signes des composantes de $G_{\kappa\lambda}$ diffèrent de ceux de $(G_{\kappa\lambda})'$ provient de notre définition de ε : nous l'avons défini comme un tenseur plutôt que comme une forme invariante.

B. Equations de Maxwell supraluminales; 4-vecteur potentiel

On sait que les équations de Maxwell peuvent s'exprimer, au moyen des tenseurs introduits dans la section précédente, de façon fort concise:

$$\frac{\partial (F^{k\lambda})'}{\partial (x^\lambda)'} = 0 \quad (6.5a)$$

$$\frac{\partial (G_{k\lambda})'}{\partial (x_\lambda)'} = (J_k)' \quad (6.5b)$$

Les équations (6.5) sont des relations tensorielles, que l'on sait valables dans Σ' . Or nous avons supposé que les quantités qui se transforment comme des tenseurs sous les transformations de Lorentz conservent cette propriété sous les transformations supraluminales. Donc les équations (6.5) sont également valables dans Σ . Au moyen des définitions (4.3a) et (4.3b) des coordonnées, des relations (6.2b) et (6.4b) des tenseurs $F^{k\lambda}$ et $G_{k\lambda}$ aux composantes du champ électromagnétique, et de la relation covariante qui, correspondant à (6.2a), donne J_k en fonction de \vec{J} et ρ , on trouve l'expression des équations de Maxwell (6.5) dans Σ :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad (6.6b)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad (6.6c)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (6.6d)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.6e)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - \epsilon^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{J_x}{\epsilon_0} \quad (6.6f)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{J_y}{\epsilon_0} \quad (6.6g)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{J_z}{\epsilon_0} \quad (6.6h)$$

Nous appellerons ces équations "équations de Maxwell supraluminales" par opposition aux "équations de Maxwell subluminales" ou simplement "équations de Maxwell".

Les relations (6.6a) à (6.6d) sont en tout point identiques au groupe homogène des équations de Maxwell subluminales. Toutefois on remarque que les relations (6.6e) à (6.6h) diffèrent du groupe inhomogène par quelques signes. Ces différences ne proviennent pas exclusivement de la définition des champs électrique et magnétique supraluminiaux. De fait, aucune définition de ces derniers comme combinaisons linéaires des champs subluminiaux ne donne aux équations de Maxwell supraluminales la forme des équations de Maxwell subluminales. A première vue, cela semble contredire le principe de relativité: comment se fait-il, en effet, que les relations entre les champs électrique et magnétique soient différentes dans deux référentiels équivalents?

Un examen plus attentif de la question révèle cependant que tel n'est pas le cas. Le principe de relativité ne requiert d'aucune façon qu'une relation physique dans Σ' soit identique à sa transformée dans Σ . De façon équivalente, le principe de relativité n'exige pas que les lois des bradyons soient identiques à celles des tachyons. Ce qui est nécessaire c'est que l'ensemble des lois, bradyoniques et tachyoniques, soit le même aux yeux de tous les observateurs privilégiés.⁺

Or c'est bien ce que nous avons. Considérons en effet le cas où il y a dans Σ' des bradyons et des tachyons, les premiers étant cependant beaucoup trop loin des seconds pour qu'il y ait interaction appréciable. Un observateur dans Σ' regarde les processus bradyoniques et vérifie qu'ils obéissent aux équations de Maxwell. Il examine ensuite les processus tachyoniques et vérifie qu'ils obéissent aux équations de Maxwell supraluminales. D'autre part, un observateur dans Σ examine lui aussi ces deux types de processus et détermine les lois auxquelles ils obéissent. Selon nos hypothèses, ces lois sont équivalentes à la transformée supraluminale des lois vérifiées dans Σ' . Mais la transformée supraluminale des lois bradyoniques n'est rien d'autre que les lois tachyoniques, et vice versa. Donc l'ensemble des lois est invariant sous une transformation entre deux référentiels privilégiés, comme l'exige le principe de relativité.

Dans le cas plus général où il peut y avoir interaction entre les

⁺ L'essence de cette interprétation du principe de relativité a déjà été donnée dans le cadre de théories quelque peu différentes. Voir par exemple [49] et [40].

tachyons et les bradyons, le principe de relativité pose une contrainte sur la forme de cette interaction. Elle doit rester invariante sous une transformation supraluminale, puisque la transformée supraluminale d'un ensemble de bradyons et de tachyons reste un ensemble de bradyons et de tachyons.

Revenons maintenant à la forme explicite des équations (6.6). Nous avons déjà remarqué que les quatre premières sont identiques aux équations de Maxwell subluminales correspondantes. Or c'est précisément ce groupe d'équations de Maxwell qui, en électrodynamique subluminale, permet de définir les potentiels scalaire et vecteur, selon les équations

$$\vec{B}' = \vec{\nabla}' \times \vec{A}' \quad (6.7a)$$

$$\vec{E}' = - \vec{\nabla}' \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} \quad (6.7b)$$

auxquelles on ajoute ordinairement la condition dite de Lorentz, i.e.

$$\frac{\partial A'_x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_y}{\partial y'} + \frac{\partial A'_z}{\partial z'} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = 0 \quad (6.8)$$

Groupés d'une certaine manière, ces potentiels se transforment comme les composantes d'un quadrivecteur. Plus précisément la quantité $(A_\kappa)'$, définie par

$$(A_\kappa)' \equiv \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \\ -\varphi'/c \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

est un 4-vecteur covariant sous les transformations de Lorentz. Il est aisé de vérifier, au moyen des relations de définition (6.9), (4.3c), (4.3d) et de l'équation (6.4a), que l'équation (6.8) est équivalente à

$$\frac{\partial (A_\kappa)'}{\partial (x_\kappa)'} = 0 \quad (6.10)$$

et que (6.7) conduit à

$$(G_{\kappa\lambda})' = \kappa \left[\frac{\partial (A_\lambda)'}{\partial (x^\kappa)'} - \frac{\partial (A_\kappa)'}{\partial (x^\lambda)'} \right] \quad (6.11)$$

A partir des quatre premières équations de Maxwell supraluminales, on pourrait définir des potentiels scalaire et vecteur comme en (6.7). L'ennui avec une telle définition, c'est que nos potentiels supraluminiaux ne seraient pas reliés aux potentiels subluminaux par une transformation vectorielle (il y aurait différence de quelques signes). Nous allons donc directement définir les potentiels supraluminiaux par transformation vectorielle des subluminaux; c'est-à-dire que nous définissons \vec{A} et φ de sorte que A_κ , donné par

$$A_\kappa \equiv \begin{bmatrix} -A_\mu \\ A_\nu \\ A_z \\ \varphi/c \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

s'obtienne de $(A_\kappa)'$ au moyen des équations (4.5c). Dès lors toutes les

quantités apparaissant dans les équations (6.10) et (6.11) sont des tenseurs sous les transformations supraluminales, et les équations elles-mêmes sont valables en tout référentiel, en particulier dans Σ où elles prennent la forme

$$\frac{\partial A_\kappa}{\partial x^\kappa} = 0 \quad (6.13a) \quad G_{\kappa\lambda} = \kappa \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial A_\kappa}{\partial x^\lambda} \right] \quad (6.13b)$$

Si l'on substitue les relations de définition (4.3a), (6.12) et l'équation (6.13b) dans (6.13b), on trouve:

$$B_\kappa = \frac{\partial A_\gamma}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (6.14a) \quad E_\kappa = -\frac{\partial A_\kappa}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} \quad (6.14d)$$

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial \kappa} + \frac{\partial A_\kappa}{\partial z} \quad (6.14b) \quad E_y = \frac{\partial A_\gamma}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (6.14e)$$

$$B_z = -\frac{\partial A_\kappa}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial \kappa} \quad (6.14c) \quad E_z = \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6.14f)$$

C'est notre définition des potentiels supraluminiaux qui fait que ces équations ne sont pas identiques aux équations (6.7). Les différences se situent, comme nous l'avons signalé, au niveau de quelques signes (plus précisément, ceux de A_y et A_z).

Nous pouvons maintenant établir les relations auxquelles satisfont nos potentiels supraluminiaux en vertu des équations de Maxwell supraluminales. Différentiant (6.13b) par rapport à x_λ , nous obtenons:

$$\frac{\partial G_{\kappa\lambda}}{\partial X_\lambda} = \kappa \frac{\partial}{\partial X_\lambda} \frac{\partial A_\lambda}{\partial X^\kappa} - \kappa \frac{\partial}{\partial X_\lambda} \frac{\partial A_\kappa}{\partial X^\lambda} \quad (6.15)$$

Le premier terme du membre de droite de (6.15) s'annule en vertu de la commutativité des dérivées partielles (pourvu que les dérivées secondes mixtes de A_λ soient continues) et de l'équation (6.13a). Nous obtenons donc, eu égard aux équations (6.5b) exprimées dans \mathcal{L} :

$$\frac{\partial^2 A_\kappa}{\partial X_\lambda \partial X^\lambda} = -\frac{J_\kappa}{\kappa} \quad (6.16)$$

La représentation explicite de (6.16) est directe, si l'on y substitue les relations de définition (4.3a), (4.3b) et (6.12) de même que la relation covariante analogue à (6.2a). On trouve ainsi:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{J_x}{\epsilon_0 c^2} \quad (6.17a)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = \frac{J_y}{\epsilon_0 c^2} \quad (6.17b)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = \frac{J_z}{\epsilon_0 c^2} \quad (6.17c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.17d)$$

En l'absence de charges et de courants, les membres de droite des équations (6.17) s'annulent, et nous pouvons arriver à des équations

différentielles fort simples pour \vec{E} et \vec{B} . Différentions en effet (6.17b) par rapport à z , et (6.17c) par rapport à y . On obtient alors, en renversant l'ordre de différentiation partielle et en posant $J_y = J_z = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.18a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.18b)$$

Soustrayant terme à terme (6.18b) de (6.18a) et utilisant (6.14a), on trouve :

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 \quad (6.19)$$

De façon analogue, on peut obtenir des équations identiques pour B_y , B_z , E_x , E_y et E_z .

Ces équations déterminent la propagation des champs électrique et magnétique là où il n'y a ni charge ni courant. On remarque leur ressemblance avec les équations de propagation des champs subluminaux. Quelques différences se situent toutefois dans les signes qui précèdent les dérivées par rapport à x et par rapport à t . Ces différences ont des répercussions profondes sur le mode de propagation des ondes électromagnétiques supraluminales, sujet que nous abordons dans la section suivante.

C. Propagation des champs électrique et magnétique supraluminiaux

Nous avons vu, à la section B du chapitre III, que les luxons produits par des tachyons ne se propagent pas de la même manière que les luxons produits par les bradyons. Il n'est donc pas surprenant que les équations décrivant la propagation des champs supraluminiaux soient différentes de leurs analogues subluminales. Nous allons, dans cette section, donner une solution de l'équation (6.19) et montrer qu'elle est consistante avec le mode de propagation des photons supraluminiaux.

Considérons donc l'équation (6.19) et définissons une quantité Δ par

$$\Delta = \sqrt{c^2 t^2 + y^2 + z^2} \quad (6.20)$$

Nous allons montrer que l'expression

$$B_x = \frac{A f(\Delta - x)}{\Delta} \quad (6.21)$$

où A est une constante et f une fonction deux fois différentiable, est une solution de l'équation (6.19). Pour ce faire, dérivons d'abord (6.21) par rapport à x :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{A}{\Delta} (-1) f'(\Delta - x)$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} = \frac{A}{\Delta} f''(\Delta - x) \quad (6.22a)$$

où f' et f'' désignent respectivement les premières et secondes dérivées de f par rapport à son argument. Dérivant ensuite (6.21) par rapport à y , nous obtenons:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{\mu}}{\partial y} &= \frac{H}{\Delta^3} \left[y \Delta f'(\Delta - \kappa) - y f(\Delta - \kappa) \right] \\ \frac{\partial^2 B_{\mu}}{\partial y^2} &= \frac{H}{\Delta^4} \left[\left\{ -\Delta^3 + 3\Delta y^2 \right\} f(\Delta - \kappa) + \left\{ \Delta^4 - 3\Delta^2 y^2 \right\} f'(\Delta - \kappa) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \Delta^3 y^2 \right\} f''(\Delta - \kappa) \right]\end{aligned}\tag{6.22b}$$

et de même, pour les dérivées en z et en t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B_{\mu}}{\partial z^2} &= \frac{H}{\Delta^4} \left[\left\{ -\Delta^3 + 3\Delta z^2 \right\} f(\Delta - \kappa) + \left\{ \Delta^4 - 3\Delta^2 z^2 \right\} f'(\Delta - \kappa) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \Delta^3 z^2 \right\} f''(\Delta - \kappa) \right]\end{aligned}\tag{6.22c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B_{\mu}}{\partial t^2} &= \frac{H c^2}{\Delta^6} \left[\left\{ -\Delta^3 + 3\Delta c^2 t^2 \right\} f(\Delta - \kappa) + \left\{ \Delta^4 - 3\Delta^2 c^2 t^2 \right\} f'(\Delta - \kappa) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \Delta^3 c^2 t^2 \right\} f''(\Delta - \kappa) \right]\end{aligned}\tag{6.22d}$$

Substituant les expressions (6.22) dans (6.19), on trouve, en tenant compte de (6.20), que l'expression résultante s'annule identiquement, montrant ainsi que (6.21) est bel et bien solution de (6.19).

Si l'on regarde de plus près à la solution (6.21) que nous venons d'obtenir, on voit qu'elle ressemble formellement à la solution en ondes sphériques de l'équation de propagation des champs subluminaux. Si de

fait nous écrivons l'équation d'un front d'onde de (6.21), i.e.

$$A - \kappa = 0 \quad (6.23)$$

nous remarquons qu'elle représente la propagation, avec κ comme paramètre, d'une onde sphérique dans l'espace $y-z-\kappa t$ émise à $\kappa = y = z = \kappa t = 0$.

Au lieu toutefois d'examiner les fronts d'onde dans l'espace $y-z-\kappa t$, nous allons les examiner dans l'espace $\kappa-y-z$. Pour ce faire, récrivons l'équation (6.23) comme

$$\kappa^2 - y^2 - z^2 = \kappa^2 t^2 \quad (6.24)$$

Il ressort qu'à chaque valeur de t correspond dans l'espace $\kappa-y-z$ une surface qui est une hyperboloïde. Supposant que ce front d'onde provienne d'une étincelle à $\kappa = y = z = \kappa t = 0^+$ et considérant que, vu l'unidirectionnalité selon l'axe κ du transfert d'information par les phénomènes supraluminaires, le front d'onde se propage seulement dans la direction correspondant à l'accroissement de κ , il ne nous reste que les parties supérieures des hyperboloïdes. Par ailleurs, puisque t peut être tant positif que négatif, chaque surface correspond à deux valeurs de t (voir la figure 1.).

⁺ Cette supposition est très vraisemblable puisque l'équation (6.24), transformée dans les coordonnées de Σ' , s'écrit $(\kappa')^2 - (y')^2 - (z')^2 - \kappa'(t')^2 = 0$, ce qui représente la propagation d'une onde sphérique provoquée par une étincelle à $\kappa' = y' = z' = \kappa t' = 0$.

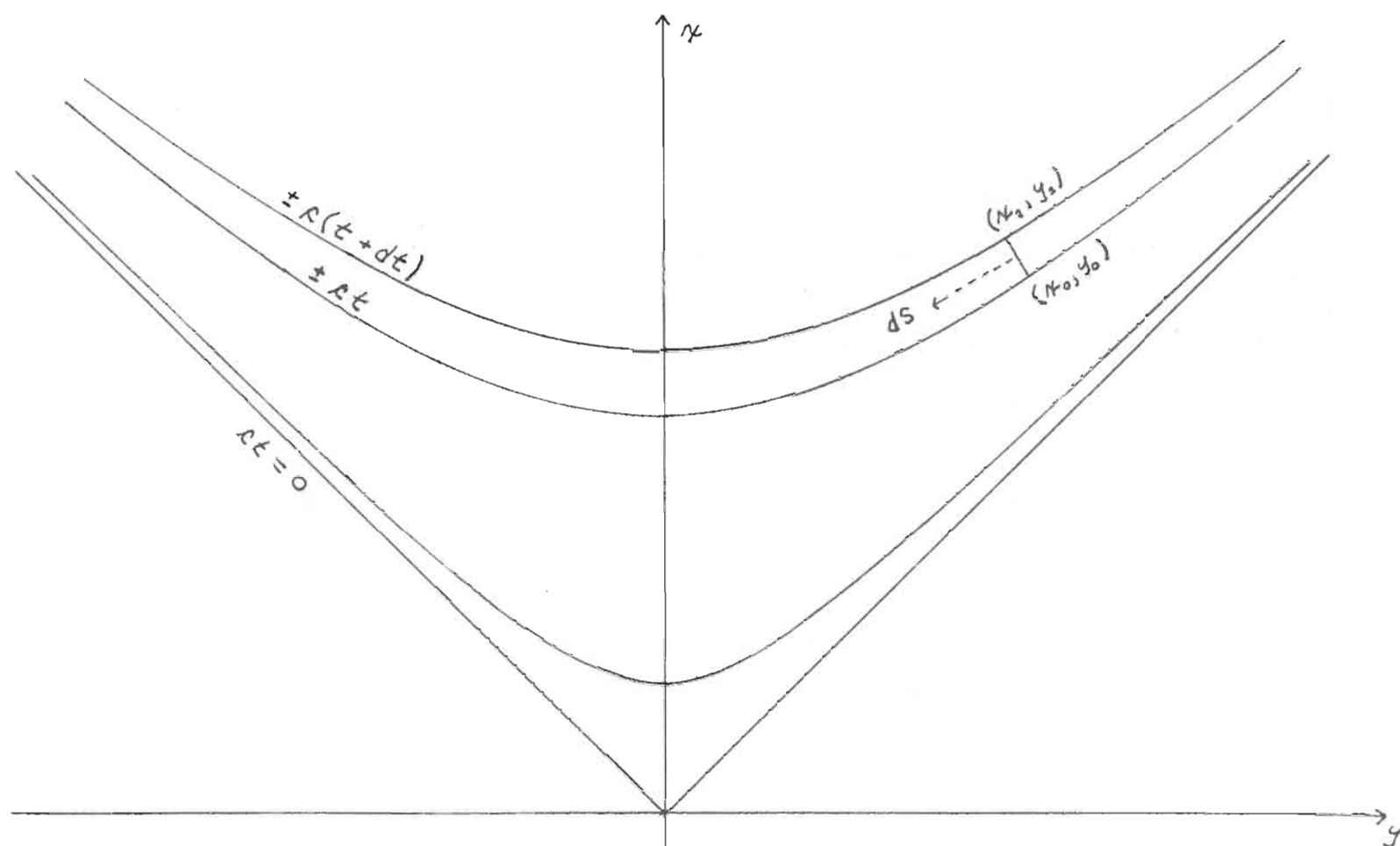


Figure 1. Propagation d'un front d'onde hyperbolique et détermination de la vitesse de phase (la coordonnée z est omise pour plus de clarté).

A partir de l'équation du front d'onde (6.24), nous allons en calculer la vitesse de phase v_{ph} . Considérons un point du front d'onde à l'instant t , et un point du front d'onde à l'instant $t + dt$, et supposons que ces deux points soient tels qu'en puisse les joindre par une ligne droite qui soit perpendiculaire aux plans tangents aux fronts d'onde en ces points.[†] Alors la vitesse de phase est le rapport de la distance dS entre les deux points sur l'intervalle dt considéré.

Les équations qui décrivent le front d'onde aux instants t et $t + dt$ sont les suivantes (pour plus de simplicité, on omet z):

$$-x^2 + y^2 + c^2 t^2 = 0 \quad (6.25a)$$

$$-x^2 + y^2 + c^2 (t + dt)^2 = 0 \quad (6.25b)$$

Choisissant un point (x_0, y_0) du front d'onde (6.25a), nous trouvons, en appliquant la géométrie analytique, que l'équation de la perpendiculaire au front d'onde en ce point est donnée par

$$y = x \left(\frac{-y_0}{x_0} \right) + 2y_0 \quad (6.26)$$

[†] Strictement parlant, la ligne n'est perpendiculaire qu'à l'un des plans. Cependant puisque l'on considère un intervalle de temps infinitésimal dt , la différence entre la longueur dS telle que définie plus loin en (6.30) et la longueur de l'arc qui serait perpendiculaire aux deux plans, est du second ordre.

Cherchons le point de rencontre (κ_1, y_1) de cette perpendiculaire avec le front d'onde (6.25b). La substitution de (6.26) dans (6.25b) nous donne

$$-\kappa_1^2 + \left[\kappa_1 \left(\frac{-y_0}{\kappa_0} \right) + 2y_0 \right]^2 + c^2 (t+dt)^2 = 0 \quad (6.27)$$

Travaillant au premier ordre en dt et utilisant le fait que (κ_0, y_0) est solution de (6.25a), nous obtenons:

$$\kappa_1^2 \left[\frac{y_0^2 - \kappa_0^2}{\kappa_0^2} \right] - \kappa_1 \left[\frac{4y_0^2}{\kappa_0} \right] + [3y_0^2 + \kappa_0^2 + 2c^2 t dt] = 0 \quad (6.28)$$

Après réarrangement et utilisation du binôme de Newton, les solutions de cette équation sont données par

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_0}{y_0^2 - \kappa_0^2} \left[2y_0^2 \pm (y_0^2 + \kappa_0^2) \left(1 - \frac{c^2 t dt (y_0^2 - \kappa_0^2)}{(y_0^2 + \kappa_0^2)^2} \right) \right] \quad (6.29)$$

dont nous ne conservons que celle qui vient du signe négatif, l'autre correspondant au point de rencontre de la perpendiculaire avec la branche inférieure de l'hyperboloïde. Par conséquent

$$\kappa_1 = \kappa_0 \left[1 + \frac{c^2 t dt}{\kappa_0^2 + y_0^2} \right] \quad (6.30)$$

La substitution de (6.30) dans (6.26) nous donne y_1 :

$$y_1 = y_0 \left[1 - \frac{c^2 t \, dt}{x_0^2 + y_0^2} \right] \quad (6.31)$$

et l'utilisation combinée de (6.30) et (6.31) nous donne la distance entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1) :

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &= \frac{c^2 t \, dt}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

d'où nous obtenons la vitesse de phase cherchée, i.e.

$$v_{ph} = \frac{dS}{dt} = \frac{c^2 t}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad (6.33)$$

Pour mieux saisir le comportement de cette vitesse de phase, nous allons l'exprimer de façon un peu différente. Pour ce faire, appelons θ_0 l'angle entre la droite (6.26) (qui, incidemment, indique la direction de propagation du front d'onde au point (x_0, y_0)) et l'axe x . On a alors:

$$\tan \theta_0 = -y_0/x_0 \quad (6.34)$$

ce qui donne:

$$|\sin \theta_0| = \frac{|y_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad (6.35a)$$

$$|\cos \theta_0| = \frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad (6.35b)$$

d'où nous trouvons:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_0 &\equiv \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \\ &= \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

L'utilisation des équations (6.36), (6.33) et (6.25) pour le point (x_0, y_0) nous donne finalement:

$$v_{ph}^2 = c^2 \cos 2\theta_0. \quad (6.37)$$

La valeur de la vitesse de phase ne dépend donc que de l'angle entre le corridor des tachyons et la direction de propagation de l'onde au point considéré. v_{ph} vaut c là où l'onde se propage parallèlement au corridor et s'annule lorsque l'onde se propage en s'inclinant de 45° vers le corridor.

Revenons un peu en arrière, et rappelons-nous que l'onde hyperbolique provient d'une étincelle émise à l'origine spatio-temporelle. On peut considérer l'étincelle comme une émission de photons supraluminiaux. Comme nous l'avons vu, ces photons ne se propagent pas isotropiquement. Selon l'équation (3.10), le module u de la vitesse d'un photon est tel que

$$u^2 = \frac{c^2}{\cos 2\theta} \quad (3.10)$$

où θ est l'angle d'inclinaison du vecteur vitesse vers la direction du corridor des tachyons.

Examinons de plus près le comportement de ce photon. Plus précisément, déterminons sa position en fonction du temps. Puisque sa vitesse est μ et qu'il est émis à l'origine spatio-temporelle, ses coordonnées spatiales x et y satisfont sûrement à la relation

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \mu t \quad (6.38a)$$

D'autre part, le fait que l'angle d'inclinaison de sa vitesse vers le corridor soit θ implique que

$$|\tan \theta| = \left| \frac{y}{x} \right| \quad (6.38b)$$

Les trois équations (3.10), (6.38a) et (6.38b) peuvent servir à éliminer les variables μ et t . On obtient ainsi, par d'élémentaires calculs, la relation suivante entre x , y et t :

$$x^2 - y^2 = c^2 t^2$$

Cette relation est identique à l'équation (6.25a), qui décrit la propagation du front d'onde hyperbolique. C'est donc dire que les photons émis à l'origine spatio-temporelle coïncident avec le front d'onde. A ce résultat on pouvait s'attendre, puisque après tout l'onde hyperbolique supraluminale est la transformée d'une onde sphérique subluminale. Or cette

dernière coïncide avec les photons subluminaux émis lors de l'étincelle. Il est donc normal que la première coïncide également avec les photons supraluminaux correspondants.

D. Champs électrique et magnétique d'une charge en mouvement uniforme le long du corridor des tachyons

Nous avons considéré, au cours de la section précédente, un mode possible de propagation du champ électromagnétique en l'absence de charges et de courants. Nous allons ici développer les champs électrique et magnétique d'un tachyon chargé qui se déplace en mouvement uniforme le long du corridor des tachyons. Nous procéderons en trois étapes: nous déterminerons d'abord, en transformant celles d'un bradyon immobile, les densités de charge et de courant d'un tachyon; nous résoudrons par la suite les équations (6.17) pour obtenir \vec{A} et φ , d'où nous tirerons finalement les champs au moyen des relations (6.14).

Considérons, du point de vue du référentiel Σ' , un bradyon chargé immobile à l'origine. Sa densité de charge ρ' et sa densité de courant \vec{j}' sont alors données par

$$\rho' = q \delta(x') \delta(y') \delta(z') \quad (6.39a)$$

$$\vec{j}' = 0 \quad (6.39b)$$

où q est la grandeur de la charge et δ la fonction de Dirac. L'utilisa-

tion de l'équation de transformation (6.2a) nous permet d'obtenir \vec{J} et ρ , i.e.

$$\rho = \frac{\gamma\beta}{|\beta|} q \delta(x') \delta(y') \delta(z') \quad (6.40a)$$

$$J_x = \frac{\gamma\beta}{|\beta|} v q \delta(x') \delta(y') \delta(z') \quad (6.40b)$$

$$J_y = J_z = 0 \quad (6.40c)$$

Les fonctions δ sont toutefois encore exprimées en fonction des coordonnées de Σ' . Pour les ramener dans Σ , on peut utiliser les équations (4.5b) et obtenir:

$$\delta(x') \delta(y') \delta(z') = \delta\left[\frac{\gamma\beta}{|\beta|} (-x + vt)\right] \delta(y) \delta(z) \quad (6.41)$$

qui devient, par les propriétés de la fonction δ

$$\delta(x') \delta(y') \delta(z') = \frac{1}{\gamma} \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z) \quad (6.42)$$

La substitution de (6.42) dans (6.40) nous donne alors:

$$\rho = \frac{\beta}{|\beta|} q \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z) \quad (6.43a)$$

$$J_x = \frac{\beta v}{|\beta|} q \delta(x-vt) \delta(y) \delta(z) = v \rho \quad (6.43b)$$

$$J_y = J_z = 0 \quad (6.43c)$$

Les équations (6.43) représentent donc les densités de charge et de courant d'un tachyon qui, passant par l'origine spatio-temporelle, se déplace à une vitesse v constante le long du corridor des tachyons.

Nous devons maintenant obtenir les potentiels \vec{A} et φ , et pour cela résoudre les équations (6.17). Nous allons considérer en détail l'équation (6.17d), les trois autres étant très semblables. Substituant donc (6.43a) dans (6.17d), nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\beta q}{|\beta| \epsilon_0} \delta(x-vt) \delta(y) \delta(z) \quad (6.44)$$

La solution de cette équation, d'allure plutôt compliquée, peut se trouver de manière assez simple.[†] Il s'agit de remarquer que les dérivées partielles en x et en t ne sont pas indépendantes. Puisqu'en effet le tachyon se déplace en mouvement rectiligne uniforme selon le corridor de $-\infty$ à $+\infty$ (de sorte que tous les points de sa trajectoire sont équivalents), il doit en quelque sorte traîner son champ avec lui. Par conséquent le changement du champ (et des potentiels) noté par un observateur fixe (dans Σ) pendant un intervalle de temps $d\tau$ est le même que celui

[†] Nous suivrons d'assez près le développement, fait dans le cas d'une charge subluminaire, par [48], chapitre 19, section 3.

qu'il noterait au cours d'un déplacement (virtuel) $dx = -v dt$ en un temps nul. Formellement

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (6.45)$$

La substitution de (6.45) dans (6.44) nous donne alors:

$$\left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\beta q}{|\beta| \epsilon_0} \delta(x-vt) \delta(y) \delta(z) \quad (6.46)$$

Dans (6.46), toutes les dérivées se prennent à temps constant, et le temps est en quelque sorte "gelé". Considérons plus particulièrement l'instant $t = 0$. On a alors:

$$\left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\beta q}{|\beta| \epsilon_0} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (6.47)$$

Si nous effectuons le changement de variable

$$x = \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1} \xi \quad (6.48)$$

nous trouvons:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{v^2}{c^2} - 1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (6.49)$$

qui donne, substitué dans (6.47):

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z^2} = - \frac{\beta q}{|\beta| \epsilon_0} \delta\left(\xi \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}\right) \delta(y) \delta(z) \quad (6.50)$$

où nous avons introduit la notation φ^* pour indiquer le changement de forme fonctionnelle provoqué dans φ par notre changement de variable. L'équation (6.50) n'est rien d'autre qu'une équation de Poisson, dont la solution bien connue est

$$\varphi^*(\xi, y, z) = \frac{\beta q}{|\beta| 4\pi \epsilon_0} \iiint \frac{\delta(\xi^0 \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}) \delta(y^0) \delta(z^0) d\xi^0 dy^0 dz^0}{\sqrt{(\xi - \xi^0)^2 + (y - y^0)^2 + (z - z^0)^2}} \quad (6.51)$$

Ramenée en fonction de κ , y et z , cette solution devient

$$\begin{aligned} \varphi(\kappa, y, z) &= \frac{\beta q}{|\beta| 4\pi \epsilon_0} \iiint \frac{\delta(\kappa^0) \delta(y^0) \delta(z^0) d\kappa^0 dy^0 dz^0}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1} \sqrt{\frac{(\kappa - \kappa^0)^2}{(\frac{v^2}{c^2} - 1)} + (y - y^0)^2 + (z - z^0)^2}} \\ &= \frac{\beta q}{|\beta| 4\pi \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) (y^2 + z^2)}} \end{aligned} \quad (6.52)$$

où nous avons effectué l'intégrale et réarrangé.

L'équation (6.52) donne la valeur du potentiel scalaire au point (κ, y, z) au moment où un tachyon chargé, se déplaçant à une vitesse v selon le corridor, passe à l'origine. Il est maintenant très simple d'obtenir les composantes du potentiel vecteur. Substituant par exemple

(6.43b) dans (6.17a), nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.53)$$

Eu égard à (6.43a), l'équation ci-haute est semblable à (6.44), à l'exception du facteur σ/ϵ_0 qui multiplie le membre de droite. Sa solution est celle de (6.44) multipliée par σ/ϵ_0 , i.e.

$$A_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \varphi \quad (6.54)$$

De même on obtient:

$$A_y = A_z = 0 \quad (6.55)$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à évaluer les champs. Commençons par la composante E_x . En utilisant les équations (6.11d) qui relie E_x à A_x et φ , (6.45) qui relie les dérivées partielles et (6.54), nous trouvons:

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.56)$$

qui, lorsqu'on y substitue l'expression de φ fournie par (6.52), nous donne:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\beta}{|\beta|} \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{-x}{\left[x^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \quad (6.57a)$$

De façon analogue, nous trouvons pour les autres composantes du champ électromagnétique les expressions suivantes:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\beta}{|\beta|} \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{y}{\left[x^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \quad (6.57b)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\beta}{|\beta|} \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \frac{z}{\left[x^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \quad (6.57c)$$

$$B_x = 0 \quad (6.57d) \quad B_y = \frac{-v\tilde{E}_z}{c^2} \quad (6.57e) \quad B_z = \frac{v\tilde{E}_y}{c^2} \quad (6.57f)$$

Les équations (6.57) nous donnent le champ électromagnétique mesuré au point (x, y, z) au moment où le tachyon passe à l'origine. Elles sont très semblables aux équations du champ électromagnétique d'un bradyon chargé qui se déplace en mouvement uniforme. Quelques différences se situent toutefois dans le facteur $\beta/|\beta|$ et dans le signe de E_x .

Nous nous souvenons qu'au chapitre précédent, après avoir introduit le 4-vecteur impulsion d'un tachyon, nous l'avons exprimé en fonction de paramètres reliés à β et de M_0 . Dans ce chapitre, nous avons d'abord introduit les champs supraluminaires au moyen d'une transformation tensorielle, ce qui les reliait non pas à des quantités de β mais bien aux champs subluminaux. Mais nous venons précisément, dans le cas particulier d'une charge en mouvement uniforme le long du corridor, d'exprimer les

champs en fonction de quantités qui appartiennent bel et bien à \mathcal{L} , et du paramètre intrinsèque q de la particule.

E. Les équations de Maxwell supraluminales: autres formulations

Nous avons donné, à la section B du présent chapitre, la forme explicite des équations de Maxwell supraluminales (relations (6.6)). Nous allons nous y attarder quelque peu dans cette section. Dans un premier temps, nous allons montrer que les relations (6.6e) à (6.6h) peuvent être tirées, comme en électromagnétisme ordinaire, d'un principe variationnel. Dans un second temps, nous présenterons d'une manière quelque peu différente les équations (6.6), mettant ainsi davantage en lumière leur ressemblance avec les équations de Maxwell subluminales.

Pour ce faire cependant, nous aurons besoin de la représentation contrevariante du tenseur G introduit en (6.4). Nous nous rappelons que l'équation (6.4b) nous en donnait la représentation covariante supraluminale. L'utilisation de la relation d'élévation d'indices (4.6) nous donne alors:

$$G^{K\lambda} = g^{KM} g^{\lambda N} G_{MN} \quad (6.58)$$

qui devient, après substitution de (4.7) et (6.4b)

$$G^{\kappa\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{L}B_z & -\mathcal{L}B_y & E_x \\ -\mathcal{L}B_z & 0 & -\mathcal{L}B_x & -E_y \\ \mathcal{L}B_y & \mathcal{L}B_x & 0 & -E_z \\ -E_x & E_y & E_z & 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Cela fait, nous pouvons passer aux points principaux de cette section. Considérons l'intégrale suivante, étendue sur tout l'espace quadridimensionnel:

$$\iiint \int \mathcal{E}_0 \left[(J^\kappa)' (A_\kappa)' - \frac{1}{4\mathcal{L}} (G_{\kappa\lambda})' (G^{\kappa\lambda})' \right] d\mathcal{L}' dy' dz' d(\mathcal{L}t') \quad (6.60)$$

On peut montrer que la variation de cette intégrale s'annule si et seulement si les équations suivantes sont vraies:⁺

$$\frac{\partial (G^{\kappa\lambda})'}{\partial (x^\lambda)'} = (J^\kappa)' \quad (6.61)$$

Ces équations, qui ne sont rien d'autre que l'expression en notation contrevariante des équations (6.5b), représentent le groupe inhomogène des équations de Maxwell.

⁺Voir [37], chapitre IV, section 30. Dans ce processus de variation, \mathcal{L}' , y' , z' et $\mathcal{L}t'$ sont les paramètres indépendants, tandis que A_x' , A_y' , A_z' et φ' sont les variables. Les tenseurs $(G_{\kappa\lambda})'$ et $(G^{\kappa\lambda})'$ sont fonctions des dérivées partielles de A_x' , ..., etc., et sont donc soumis à la variation. Toutefois J_x' , J_y' , J_z' et ρ' ne varient pas.

La quantité entre crochets dans l'intégrale (6.60) est scalaire. Par conséquent, cette intégrale est égale à

$$\iiint \varepsilon_0 \left[J^k A_k - \frac{1}{4\lambda} G_{\kappa\lambda} G^{\kappa\lambda} \right] |(-1)| dx dy dz d(ct) \quad (6.62)$$

le (-1) n'étant rien d'autre que le jacobien du changement de variables (i.e. le déterminant de la matrice $\beta_{\kappa\lambda}$ définie en (4.4b)). On s'attend donc que la variation de (6.62) va conduire au groupe inhomogène des équations de Maxwell supraluminales. C'est ce que nous allons vérifier.

Représentons d'abord l'intégrale (6.62) plus explicitement. Les composantes de J^k sont données par les équations (6.2a), celles de A_k par (6.12), celles de $G_{\kappa\lambda}$ et $G^{\kappa\lambda}$ par (6.4b) et (6.59) respectivement. Par substitution de tout ce bagage dans (6.62), on trouve:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \iiint dx dy dz d(ct) & \left[\frac{1}{\varepsilon_0 \lambda} (-J_\kappa A_\kappa + J_4 A_4 + J_z A_z + \rho \varphi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\lambda} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_4^2 - \mathcal{E}_z^2 - \mathcal{L}^2 B_\kappa^2 + \mathcal{L}^2 B_4^2 + \mathcal{L}^2 B_z^2) \right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

qui devient finalement, par l'utilisation de (6.14)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \iiint dx dy dz d(ct) & \left[\frac{1}{\varepsilon_0 \lambda} (-J_\kappa A_\kappa + J_4 A_4 + J_z A_z + \rho \varphi) \right. \\ & + \frac{1}{2\lambda} \left\{ \left(\frac{-\partial \varphi}{\partial \kappa} - \frac{\mathcal{L} \partial A_\kappa}{\partial(ct)} \right)^2 - \left(\frac{-\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\mathcal{L} \partial A_4}{\partial(ct)} \right)^2 - \left(\frac{-\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\mathcal{L} \partial A_z}{\partial(ct)} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{L}^2 \left(\frac{-\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_4}{\partial z} \right)^2 + \mathcal{L}^2 \left(\frac{\partial A_\kappa}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial \kappa} \right)^2 + \mathcal{L}^2 \left(\frac{-\partial A_4}{\partial \kappa} - \frac{\partial A_\kappa}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.64)$$

Notre processus de variation s'applique aux quantités A_x , A_y , A_z et ϕ ainsi qu'à leurs dérivées; x , y , z et ct sont les paramètres indépendants. Le calcul des variations nous dit alors que ce processus est équivalent à quatre équations différentielles, dont la première est donnée par (voir [78], appendice 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial A_x}{\partial(ct)} \right)} \right] - \frac{\partial f}{\partial A_x} = 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

et dont les trois autres sont obtenues si l'on remplace A_x par A_y , A_z ou ϕ . f désigne bien sûr la quantité entre crochets dans (6.64). Si l'on effectue les dérivées requises par (6.65), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [0] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon \left(-\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) (-1) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\epsilon \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\epsilon \partial A_x}{\partial(ct)} \right) (-\epsilon) \right] - \left[\frac{-J_x}{\epsilon_0 \epsilon} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.66)$$

d'où l'on trouve, en réutilisant (6.14):

$$-\epsilon \frac{\partial B_z}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial(ct)} = \frac{-J_x}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (6.67)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (6.6f). On peut vérifier que les

trois autres équations différentielles du type (6.65) sont équivalentes à (6.6e), (6.6g) et (6.6h). Notre prévision était donc correcte, c'est-à-dire que la variation de l'intégrale (6.62) fournit bel et bien le groupe inhomogène des équations de Maxwell supraluminales.

Le deuxième point sur lequel nous voulons insister dans cette section est la ressemblance qui existe entre les équations de Maxwell subluminales et supraluminales. Pour ce faire, récrivons les équations (6.6) comme

$$\frac{\partial(-\epsilon B_y)}{\partial(\epsilon t)} + \frac{\partial(-\epsilon z)}{\partial y} + \frac{\partial(\epsilon_y)}{\partial z} = 0 \quad (6.6b)$$

$$\frac{\partial(-\epsilon B_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\epsilon B_z)}{\partial z} + \frac{\partial(-\epsilon B_x)}{\partial x} = 0 \quad (6.6a)$$

$$-\frac{\partial(-\epsilon B_y)}{\partial(\epsilon t)} + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial(-\epsilon z)}{\partial x} = 0 \quad (6.6c)$$

$$\frac{\partial(\epsilon B_z)}{\partial(\epsilon t)} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = 0 \quad (6.6d)$$

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial(\epsilon t)} + \frac{\partial(\epsilon B_z)}{\partial y} + \frac{\partial(-\epsilon B_y)}{\partial z} = \frac{J_x}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (6.6f)$$

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} - \frac{\partial(-\epsilon z)}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad (6.6e)$$

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial(\epsilon t)} + \frac{\partial(-\epsilon B_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\epsilon B_z)}{\partial x} = \frac{J_y}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (6.6g)$$

$$\frac{\partial(-E_z)}{\partial(ct)} - \frac{\partial(-cB_x)}{\partial y} - \frac{\partial(-cB_y)}{\partial x} = \frac{J_z}{\epsilon_0 c} \quad (6.6h)$$

D'autre part, nous savons que les équations de Maxwell subluminales s'écrivent ainsi:

$$\frac{\partial(cB_x')}{\partial x'} + \frac{\partial(cB_y')}{\partial y'} + \frac{\partial(cB_z')}{\partial z'} = 0 \quad (6.68a)$$

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial(cB_x')}{\partial(ct')} = 0 \quad (6.68b)$$

$$- \frac{\partial(E_z')}{\partial x'} + \frac{\partial(E_x')}{\partial z'} + \frac{\partial(cB_y')}{\partial(ct')} = 0 \quad (6.68c)$$

$$\frac{\partial E_y'}{\partial x'} - \frac{\partial E_x'}{\partial y'} + \frac{\partial(cB_z')}{\partial(ct')} = 0 \quad (6.68d)$$

$$\frac{\partial E_x'}{\partial x'} + \frac{\partial E_y'}{\partial y'} + \frac{\partial E_z'}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad (6.68e)$$

$$\frac{\partial(cB_z')}{\partial y'} - \frac{\partial(cB_y')}{\partial z'} - \frac{\partial(E_x')}{\partial(ct')} = \frac{J_x'}{\epsilon_0 c} \quad (6.68f)$$

$$- \frac{\partial(cB_z')}{\partial x'} + \frac{\partial(cB_x')}{\partial z'} - \frac{\partial E_y'}{\partial(ct')} = \frac{J_y'}{\epsilon_0 c} \quad (6.68g)$$

$$\frac{\partial(cB_y')}{\partial x'} - \frac{\partial(cB_x')}{\partial y'} - \frac{\partial(E_z')}{\partial(ct')} = \frac{J_z'}{\epsilon_0 c} \quad (6.68h)$$

La comparaison de (6.6) et de (6.68) fait voir d'ores et déjà quelques a-

analogies. Elles deviennent évidentes si l'on effectue un changement de notation des quantités supraluminales. En effet posons:

$$J_x = \kappa \rho \quad (6.69a)$$

$$J_z = \varkappa \bar{J}_z \quad (6.69c)$$

$$J_y = \varkappa \bar{J}_y \quad (6.69b)$$

$$\rho = J_{xt} / \kappa \quad (6.69d)$$

$$E_x = E_{xt} \quad (6.69e)$$

$$B_x = -\bar{H}_{ct} \quad (6.69h)$$

$$E_y = \kappa \bar{H}_z \quad (6.69f)$$

$$B_y = -\bar{E}_z / \kappa \quad (6.69i)$$

$$\bar{E}_z = -\kappa \bar{H}_y \quad (6.69g)$$

$$\bar{B}_z = \bar{E}_y / \kappa \quad (6.69j)$$

et substituons (6.69) dans (6.6); on obtient alors:

$$\frac{\partial(\kappa \bar{H}_{ct})}{\partial(\kappa t)} + \frac{\partial(\kappa \bar{H}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\kappa \bar{H}_z)}{\partial z} = 0 \quad (6.70a)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial(\kappa \bar{H}_{ct})}{\partial \kappa} = 0 \quad (6.70b)$$

$$- \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial(\kappa t)} + \frac{\partial \bar{E}_{ct}}{\partial z} + \frac{\partial(\kappa \bar{H}_y)}{\partial \kappa} = 0 \quad (6.70c)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial(\kappa t)} - \frac{\partial \bar{E}_{ct}}{\partial y} + \frac{\partial(\kappa \bar{H}_z)}{\partial \kappa} = 0 \quad (6.70d)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_{ct}}{\partial(\kappa t)} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.70e)$$

$$\frac{\partial(\kappa \bar{H}_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\kappa \bar{H}_y)}{\partial z} - \frac{\partial \bar{E}_{ct}}{\partial \kappa} = \frac{\bar{J}_{ct}}{\epsilon_0 \kappa} \quad (6.70f)$$

$$- \frac{\partial(\kappa \bar{H}_x)}{\partial(\kappa t)} + \frac{\partial(\kappa \bar{H}_{ct})}{\partial z} - \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \kappa} = \frac{\bar{J}_y}{\epsilon_0 \kappa} \quad (6.70g)$$

$$\frac{\partial(\kappa \bar{H}_y)}{\partial(\kappa t)} - \frac{\partial(\kappa \bar{H}_{ct})}{\partial y} - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \kappa} = \frac{\bar{J}_z}{\epsilon_0 \kappa} \quad (6.70h)$$

Les équations (6.70) sont maintenant identiques aux équations subluminales (6.68), à ceci près que ce qui est κ dans les unes devient κt dans les autres et vice versa. On peut montrer que les quantités \bar{E}_y , \bar{E}_z et \bar{E}_{ct} ($\kappa \bar{B}_z$, $-\kappa \bar{B}_y$ et \bar{E}_κ), d'une part, et \bar{H}_y , \bar{H}_z et \bar{H}_{ct} ($-\bar{E}_z/\kappa$, \bar{E}_y/κ et $-\bar{B}_\kappa$), d'autre part, forment les composantes de deux vecteurs dans l'espace tridimensionnel $y-z-\kappa t$. On peut également montrer que ces deux vecteurs, qui satisfont à des relations analogues à celles auxquelles satisfont les champs électrique et magnétique subluminaux (à l'interversion de κ et κt près, bien sûr), se propagent dans l'espace $y-z-\kappa t$ de la même manière que \vec{E}' et \vec{B}' se propagent dans l'espace $y'-z'-\kappa'$.

C'est sur cette analogie que nous terminons le chapitre consacré à l'étude du champ électromagnétique supraluminal. Nous allons maintenant examiner comment agit ce champ sur la matière supraluminale, et en quoi modifie-t-il ses propriétés dynamiques.

CHAPITRE VII

ELECTRODYNAMIQUE SUPRALUMINALE

A. Action du champ électromagnétique sur une particule chargée

Au cours des deux chapitres précédents nous avons vu, entre autres choses, quelles sont les relations entre les champs électrique et magnétique et la distribution de charge et de courant qui les produit, et comment l'action d'une force sur une particule modifie-t-elle son état dynamique. Pour en arriver à décrire les interactions entre charges et courants, il nous faut réunir les deux bouts de la chaîne; nous devons, par exemple, connaître la force exercée sur une particule chargée par un champ électromagnétique. C'est ce que nous allons étudier dans cette section.

On sait qu'en électrodynamique subluminale l'action d'un champ électrique \vec{E}' et d'un champ magnétique \vec{B}' sur une charge q qui se déplace à une vitesse \vec{u}' est donnée par la force de Lorentz.[†] On peut la

[†] La force de Lorentz décrit correctement l'action du champ sur u-

représenter en langage tensoriel par l'expression

$$(F_K)' = \frac{q}{\lambda} (G_{K\lambda})' (U^\lambda)' \quad (7.1)$$

Puisque (7.1) est une relation tensorielle, elle est valable, comme nous l'avons plusieurs fois signalé, en tout référentiel. Ecrivons-la explicitement dans \mathcal{L} . L'expression de U^λ ($\equiv \dot{P}^\lambda / m_0$) est donnée en (5.6), celle de $G_{K\lambda}$ en (6.4b) et celle de F_K par l'équation (5.18) écrite en notation covariante. On obtient ainsi:

$$\begin{bmatrix} -f_K \\ f_1 \\ f_2 \\ \frac{1}{\lambda} (f_1 \mu_K - f_2 \mu_1 - f_2 \mu_2) \end{bmatrix} = \frac{q}{\lambda} \begin{bmatrix} -(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_K \\ -(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_1 \\ -(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_2 \\ \frac{1}{\lambda} \vec{E} \cdot \vec{u} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

où $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_K$, par exemple, représente la composante selon K de $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$.

Les trois premières relations fournies par (7.2), qui donnent ce que l'on peut appeler la force de Lorentz supraluminale, sont très semblables à leurs analogues subluminales. Elles n'en diffèrent de fait que par les signes des composantes f_1 et f_2 . Ces différences se retrouvent incidemment dans la quatrième relation, qui du reste découle des

ne charge dans le cas quasi stationnaire, c'est-à-dire lorsque l'accélération de la charge est petite, et qu'on peut négliger le rayonnement (voir [1], chapitre 5, section 6).

trois premières.

Nous avons maintenant en main tous les outils nécessaires au calcul des interactions entre charges supraluminales dans le cas quasi stationnaire. A partir d'une distribution de charges connue, nous obtenons ρ et \vec{j} d'où nous tirons les champs électrique et magnétique au moyen des équations (6.6). En retour ces champs agissent sur les charges conformément aux équations (7.2), et le mouvement des particules est modifié suivant les équations (5.8) et (5.14). Pratiquement, cette façon de procéder est souvent plus compliquée qu'elle ne le semble à première vue puisque, comme en électrodynamique ordinaire, les interactions ne se propagent qu'à une vitesse finie⁺ et donnent lieu à des effets retardés et/ou avancés.

En guise d'application de l'expression de la force de Lorentz supraluminale, nous allons calculer le champ électromagnétique d'un tachyon chargé en mouvement uniforme le long du corridor. Notre développement, plus simple que celui que nous avons fait au chapitre précédent en résolvant les équations de \vec{A} et de ϕ , consiste en ceci: d'abord écrire la force qu'exerce une charge immobile sur une charge mobile mais subluminaire; transformer ensuite cette force dans un référentiel où les charges se déplacent à une vitesse supraluminale; comparer finalement cette force transformée à l'expression de la force de Lorentz supraluminale, et iden-

⁺ La vitesse de propagation des interactions supraluminales doit correspondre à celle des photons supraluminaires. Elle est donc finie, sauf dans le cas limite d'inclinaison de 45° vers le corridor.

tifier les termes correspondants aux champs électrique et magnétique.[†]

Considérons donc une charge q immobile à l'origine de \mathcal{L}' et une charge q_1 se déplaçant relativement à \mathcal{L}' à une vitesse subluminaire \vec{u}' . Au temps $t=0$ dans \mathcal{L} , la charge q est située à l'origine et se déplace à une vitesse $\vec{v} = v \hat{z}$ (on se rappelle que v désigne toujours la vitesse de \mathcal{L}' relativement à \mathcal{L}) tandis que q_1 est située à un point (x, y, z) de \mathcal{L} et se déplace à une vitesse \vec{u} , que l'on peut bien sûr obtenir de \vec{u}' par les transformations de la vitesse. A la position spatio-temporelle $(x, y, z, ct=0)$ dans \mathcal{L} correspond la position (x', y', z', ct') dans \mathcal{L}' , reliée à la première par les équations (4.5b). On a ainsi:

$$x' = -\frac{\gamma\beta}{|\beta|} x \quad y' = y \quad z' = z \quad ct' = \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \beta x \quad (7.3)$$

D'autre part, la force exercée par q sur q_1 au temps t' dans \mathcal{L}' est évidemment donnée par la loi de Coulomb, puisque q y est immobile. De façon explicite:

$$\vec{f}' = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}}{\{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\}^{3/2}} \right] \quad (7.4)$$

Substituant (7.3) dans (7.4), on obtient:

[†] Notre développement suit de très près celui qui a été fait dans le cas subluminal par [60], chapitre 7, sections 3 et 4.

$$\vec{f}' \equiv f'_x \hat{i} + f'_y \hat{j} + f'_z \hat{k} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\frac{-\delta\beta}{|\beta|} x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] \quad (7.5)$$

Pour trouver les composantes de la force \vec{f} dans Σ , il faut substituer les composantes de \vec{f}' données en (7.5) dans les équations de transformation (5.20), ce qui donne:

$$f_z = \frac{\delta\beta}{|\beta|} \left[\frac{v\mu_x}{x^2} - 1 \right] \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \quad (7.6a)$$

$$f_y = \frac{\delta\beta}{|\beta|} \left[\frac{v\mu_y}{x^2} - 1 \right] \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \quad (7.6b)$$

$$f_x = \frac{\delta\beta}{|\beta|} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-x + \frac{v}{x^2} (y\mu_y + z\mu_z)}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] \quad (7.6c)$$

La force dont les composantes sont données par les équations (7.6) agit donc à l'instant $t = 0$ sur une charge q_1 située au point (x, y, z) et animée d'une vitesse \vec{u} . Elle est produite par une charge q_2 qui se trouve à l'origine spatiale de Σ lorsque $t = 0$. Par ailleurs les équations (7.2) nous fournissent une expression générale pour la force électromagnétique agissant sur une charge animée d'une vitesse \vec{u} . Si on l'écrit de façon explicite dans le cas d'une charge q_1 , on obtient:

$$f_z = q_1 (-E_z + \mu_y B_x - \mu_x B_y) \quad (7.7a)$$

$$f_y = q_1 (-E_y + \mu_x B_z - \mu_z B_x) \quad (7.7b)$$

$$p_x = q_2 (E_x + \mu_y B_z - \mu_z B_y) \quad (7.7c)$$

dont (7.6) doit être un cas particulier. Si l'on identifie les coefficients de μ_x , μ_y et μ_z apparaissant dans (7.6) à ceux de (7.7), on trouve:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \frac{-x}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \quad (7.8a)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \frac{y}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \quad (7.8b)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\beta}{|\beta|} \frac{z}{\{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \quad (7.8c)$$

$$B_x = 0 \quad (7.8d) \quad B_y = \frac{-vE_z}{c^2} \quad (7.8e) \quad B_z = \frac{vE_y}{c^2} \quad (7.8f)$$

Les équations (7.8) représentent donc le champ qui agit au point (x, y, z) , à l'instant $t=0$, sur la charge q_2 . Ce champ est bien sûr produit par la charge q qui, au même instant, est située à l'origine et se déplace à une vitesse v constante et parallèle au corridor des tachyons. On remarque que les relations (7.8) concordent parfaitement avec les relations (6.57), comme du reste on s'y attendait.

B. Lagrangien et hamiltonien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

A la section C du chapitre V, nous avons introduit le lagrangien d'une particule supraluminale libre, de même que ses moments canoniques et son hamiltonien. Il est bien évident qu'il ne s'agissait que d'un cas très particulier. Nous allons dans cette section considérer un cas un peu plus général, celui d'une particule chargée dans un champ électromagnétique.

Nous avons signalé que la trajectoire d'une particule libre est telle qu'elle minimise l'intégrale (5.21). Considérons, du point de vue du référentiel \mathcal{L}' , un bradyon de charge q qui se déplace d'un point P_1 à un point P_2 dans un champ électromagnétique dérivable d'un potentiel quadrivectoriel $(A_k)'$. Il est bien connu que la trajectoire de ce bradyon rend stationnaire la valeur de l'intégrale suivante:⁺

$$\int_{P_1}^{P_2} [-m_0 c^2 d\tau + q (A_k)' d(x^k)'] \quad (7.9)$$

qui, comme on s'y attend, se réduit à (5.21) lorsque $(A_k)' = 0$.

La quantité entre crochets dans (7.9) étant une quantité scalai-

⁺Voir [37], chapitre III, sections 16 et 17. Eu égard au lagrangien que nous définirons plus bas, le paramètre indépendant dans le processus de variation est τ , tandis que κ , y et z sont les variables. A_k est bien sûr fonction de κ , y , z et τ .

re, le processus de minimisation ne dépend pas du référentiel dans lequel on l'effectue. On peut en particulier travailler dans \mathcal{L} , où (si dt n'est pas 0) l'intégrale (7.9) est équivalente à

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-m_0 c^2 \frac{d\tau}{dt} + g A_k \frac{dx^k}{dt} \right] dt \quad (7.10)$$

L'expression ci-haute nous permet de définir comme suit le lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -m_0 c^2 \frac{d\tau}{dt} + g A_k \frac{dx^k}{dt} \\ &= \frac{-m_0 c^2 \mu_x}{|\mu_x|} \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}} + g \left[-A_x \mu_x + A_y \mu_y + A_z \mu_z + \varphi \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

où nous avons utilisé les relations (5.17), (4.3a) et (6.12) qui donnent explicitement $d\tau$, χ^k et A_k . L'expression (7.11) nous permet de calculer les moments canoniques P_x , P_y et P_z ; on obtient, en tenant compte de (5.6):

$$P_x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_x} = \frac{-m_0 |\mu_x|}{\sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}}} - g A_x = -p_x - g A_x \quad (7.12a)$$

$$P_y \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_y} = \frac{m_0 \mu_x \mu_y / |\mu_x|}{\sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}}} + g A_y = p_y + g A_y \quad (7.12b)$$

$$P_z \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_z} = \frac{m_0 \mu_x \mu_z / |\mu_x|}{\sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}}} + g A_z = p_z + g A_z \quad (7.12c)$$

Nous avons signalé que la trajectoire de la particule chargée rend stationnaire la valeur de l'intégrale (7.10). On sait qu'une telle condition est équivalente aux équations d'Euler-Lagrange correspondantes, i.e.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_z} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad (7.13a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_y} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad (7.13b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_x} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (7.13c)$$

D'autre part, nous savons également que la trajectoire de notre particule est décrite par les équations de mouvement (5.8), \vec{f}' étant alors la force de Lorentz supraluminale donnée en (7.2). Vérifions que les deux modes de description coïncident.

Considérons l'équation (7.13a), et substituons-y (7.11) et (7.12c); on obtient ainsi:

$$\frac{d\beta_z}{dt} + q \frac{dA_z}{dt} + q\mu_x \frac{\partial A_x}{\partial z} - q\mu_y \frac{\partial A_y}{\partial z} - q\mu_z \frac{\partial A_z}{\partial z} - q \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (7.14)$$

Développant en dérivées partielles la dérivée totale qui figure au deuxième terme de (7.14) et réarrangeant, on trouve:

$$\frac{d\beta_z}{dt} = -q \left[\left(\frac{-\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \mu_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \mu_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] \quad (7.15)$$

L'utilisation de (5.8) et des relations (6.14) exprimant les champs en fonction des potentiels nous donne finalement:

$$f_z = \frac{dp_z}{dt} = -q \left(E_z + \mu_x B_y - \mu_y B_x \right) \quad (7.16)$$

qui, comme nous l'avions prévu, coïncide avec l'une des composantes de la force de Lorentz supraluminale. On peut montrer, de façon analogue, que les équations d'Euler-Lagrange (7.13b) et (7.13c) fournissent les deux autres composantes de la force de Lorentz supraluminale.

Revenons maintenant un peu en arrière et formons, au moyen des moments canoniques obtenus en (7.12) et du lagrangien (7.11), l'hamiltonien H d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. On a:

$$\begin{aligned} H &\equiv \mu_x P_x + \mu_y P_y + \mu_z P_z - L \\ &= -\mu_x p_x - q \mu_x A_x + \mu_y p_y + q \mu_y A_y + \mu_z p_z + q \mu_z A_z \\ &\quad + \frac{\mu_0 c^2 \mu_x}{|\mu_x|} \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}} + q \mu_x A_x - q \mu_y A_y - q \mu_z A_z - q \phi \end{aligned} \quad (7.17)$$

Après simplification, utilisation de l'expression (5.6) du 4-vecteur impulsion et nouvelle simplification, on obtient:

$$H = \frac{-\mu_0 c^2 \frac{\mu_x}{|\mu_x|}}{\sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - c^2}{c^2}}} - q \phi = -E - q \phi \quad (7.18)$$

qui devient, pour peu que l'on exprime \mathcal{E} à partir de (5.12):

$$H = -c \frac{\mu_K}{|\mu_K|} \sqrt{p_K^2 - p_4^2 - p_z^2 - \mu_0^2 c^2} - q\phi \quad (7.19)$$

Le facteur $\frac{\mu_K}{|\mu_K|}$ a été introduit avec l'extraction de la racine carrée, pour que (7.19) corresponde bel et bien à (7.18). Substituant pour terminer (7.12) dans (7.19), on obtient l'hamiltonien exprimé en fonction des moments canoniques, i.e.

$$H = -q\phi - \frac{c \mu_K}{|\mu_K|} \sqrt{(p_K + qA_K)^2 - (p_4 - qA_4)^2 - (p_z - qA_z)^2 - \mu_0^2 c^2} \quad (7.20)$$

La dépendance de H sur K , q , z et t se fait à travers ϕ , A_K , A_4 et A_z . Il est aisé de vérifier, en utilisant l'hamiltonien tel que donné ci-haut, que les six équations canoniques se réduisent aux équations (7.12) et à l'expression de la force de Lorentz supraluminale.

C. Tenseurs d'énergie-impulsion

Nous allons, dans cette section, introduire deux nouveaux tenseurs, reliés à l'énergie et à l'impulsion du champ électromagnétique et de la matière qui s'y trouve. Nous examinerons quelques relations différentielles auxquelles ces tenseurs satisfont, en guise de préparation à l'étude, que nous aborderons plus loin, des lois intégrales de conserva-

tion. Nous terminerons cette section par des considérations sur l'énergie et l'impulsion du champ d'un tachyon chargé.

Revenons tout d'abord au tenseur contrevariant $(F^{\kappa\lambda})'$ introduit dans l'équation (6.1b). Au moyen de la relation d'abaissement d'indices (4.10b), il est aisé de former son correspondant covariant $(F_{\kappa\lambda})'$. On obtient:

$$(F_{\kappa\lambda})' = (g_{\kappa\mu})' (g_{\lambda\nu})' (F^{\mu\nu})' = \begin{bmatrix} 0 & E_z' & -E_y' & -cB_x' \\ -E_z' & 0 & E_x' & -cB_y' \\ E_y' & -E_x' & 0 & -cB_z' \\ cB_x' & cB_y' & cB_z' & 0 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Un calcul analogue nous donne $F_{\kappa\lambda}$ à partir de $F^{\kappa\lambda}$ et de la relation (4.10a).

On trouve:

$$F_{\kappa\lambda} = g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & -cB_x \\ E_z & 0 & E_x & cB_y \\ -E_y & -E_x & 0 & cB_z \\ cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Nous pouvons maintenant introduire le premier des deux tenseurs que nous avons annoncés. Il s'agit d'un tenseur mixte, que nous noterons T et appellerons tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique. On le définit par

$$(T^{\kappa}_{\lambda})' = (F^{\kappa\mu})' (F_{\mu\lambda})' + \frac{1}{4} (\delta^{\kappa}_{\lambda})' (F_{\mu\nu})' (F^{\mu\nu})' \quad (7.23)$$

où $(\delta^{\kappa}_{\lambda})'$ est le delta de Kronecker. En utilisant les relations (6.1b) et (7.21) qui donnent $(F^{\kappa\lambda})'$ et $(F_{\kappa\lambda})'$ en fonction des champs \vec{E}' et \vec{B}' , on obtient la représentation explicite de $(\mathcal{T}^{\kappa}_{\lambda})'$, i.e.

$$(\mathcal{T}^{\kappa}_{\lambda})' = \begin{bmatrix} -W' + (E'_x)^2 + c^2 (B'_x)^2 & E'_x E'_y + c^2 B'_x B'_y & \dots \\ E'_x E'_y + c^2 B'_x B'_y & -W' + (E'_y)^2 + c^2 (B'_y)^2 & \dots \\ E'_x E'_z + c^2 B'_x B'_z & E'_y E'_z + c^2 B'_y B'_z & \dots \\ -c (\vec{E}' \times \vec{B}')_x & -c (\vec{E}' \times \vec{B}')_y & \dots \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\begin{bmatrix} E'_x E'_z + c^2 B'_x B'_z & c (\vec{E}' \times \vec{B}')_x \\ E'_y E'_z + c^2 B'_y B'_z & c (\vec{E}' \times \vec{B}')_y \\ -W' + (E'_z)^2 + c^2 (B'_z)^2 & c (\vec{E}' \times \vec{B}')_z \\ -c (\vec{E}' \times \vec{B}')_z & W' \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

où

$$W' \equiv \frac{1}{2} \left[(E'_x)^2 + (E'_y)^2 + (E'_z)^2 + c^2 (B'_x)^2 + c^2 (B'_y)^2 + c^2 (B'_z)^2 \right] \quad (7.25)$$

Pour trouver la représentation explicite du tenseur \mathcal{T} dans \mathcal{L} , on pourrait transformer (7.24) au moyen des transformations supraluminales (4.5a) et (4.5c), et par la suite exprimer les composantes E'_x , E'_y , ..., etc. du champ électromagnétique en fonction des composantes E_x , E_y , ..., etc., au moyen d'une relation analogue à (6.2b). Il est plus simple cependant de partir directement de la relation (7.23) exprimée dans \mathcal{L} , i.e.

$$\mathcal{T}^{\kappa}_{\lambda} = F^{\kappa\mu} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \delta^{\kappa}_{\lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.26)$$

et d'y substituer $F^{\kappa\lambda}$ et $F_{\kappa\lambda}$ tels que donnés en fonction de \vec{E} et \vec{B} par (6.2b) et (7.22). On obtient ainsi:

$$\Gamma^\kappa_\lambda = \begin{bmatrix} W & E_x E_y + c^2 B_{0x} B_{0y} \\ -E_x E_y - c^2 B_{0x} B_{0y} & -W + E_z^2 + c^2 B_z^2 \\ -E_x E_z - c^2 B_{0x} B_{0z} & -E_y E_z - c^2 B_{0y} B_{0z} \\ c(\vec{E} \times \vec{B}_0)_x & -c(\vec{E} \times \vec{B}_0)_y \\ E_x E_z + c^2 B_{0x} B_{0z} & -c(\vec{E} \times \vec{B}_0)_x \\ -E_y E_z - c^2 B_{0y} B_{0z} & -c(\vec{E} \times \vec{B}_0)_y \\ -W + E_y^2 + c^2 B_y^2 & -c(\vec{E} \times \vec{B}_0)_z \\ -c(\vec{E} \times \vec{B}_0)_z & -W + E_x^2 + c^2 B_x^2 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

où

$$W \equiv \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + c^2 B_x^2 + c^2 B_y^2 + c^2 B_z^2) \quad (7.28)$$

$$\vec{B}_0 \equiv B_{0x} \hat{i} + B_{0y} \hat{j} + B_{0z} \hat{k} \equiv -B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (7.29)$$

On peut montrer en électrodynamique subluminaire qu'en vertu des équations de Maxwell, le tenseur $(\Gamma^\kappa_\lambda)'$ satisfait à la relation⁺

$$\frac{\partial (\Gamma^\kappa_\lambda)'}{\partial (X_\lambda)'} = (G^{\kappa\lambda})' (J_\lambda)' \quad (7.30)$$

⁺ Voir [48], chapitre 21, sections 1 et 3.

qui, puisque exprimée en langage tensoriel, est bien sûr valable en tout référentiel. Nous allons, dans Σ , l'exprimer de façon un peu plus explicite: en utilisant (7.27), (4.3b), (6.59) et la relation covariante correspondant à (6.2a), nous obtenons:

$$-\frac{\partial \gamma^1_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma^1_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^1_3}{\partial z} - \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B}_0)_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_x \quad (7.31a)$$

$$-\frac{\partial \gamma^2_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma^2_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^2_3}{\partial z} - \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B}_0)_y}{\partial t} = \frac{-1}{\epsilon_0} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_y \quad (7.31b)$$

$$-\frac{\partial \gamma^3_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma^3_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^3_3}{\partial z} - \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B}_0)_z}{\partial t} = \frac{-1}{\epsilon_0} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_z \quad (7.31c)$$

$$-c \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B}_0)_x}{\partial x} - c \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B}_0)_y}{\partial y} - c \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B}_0)_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \gamma^4_4}{\partial t} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{E}}{\epsilon_0 c} \quad (7.31d)$$

Les membres de droite de (7.31) ressemblent beaucoup aux composantes de la force de Lorentz supraluminale données en (7.2), sauf qu'ils font intervenir des densités de charge et de courant. Il serait intéressant d'obtenir une relation analogue à (7.2) qui fasse intervenir des densités de masse d'une part, et de charge et de courant d'autre part. Nous pourrions alors relier les membres de gauche de (7.31), qui ne contiennent que des paramètres électromagnétiques, aux membres de gauche de (7.2), qui ne contiennent que des paramètres dynamiques.

Pour ce faire, nous allons introduire notre second tenseur, que nous noterons θ , appellerons tenseur énergie-impulsion de la matière et définirons par

$$(\theta^{\kappa}_{\lambda})' = \frac{\mu'_0}{\varepsilon_0} \frac{d(x^{\kappa})'}{d\tau} \frac{d(x_{\lambda})'}{dt'} \quad (7.32a)$$

où μ'_0 représente la densité de masse propre de la matière.⁺ Dans Σ , θ est donné par la relation analogue

$$\theta^{\kappa}_{\lambda} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{dx^{\kappa}}{d\tau} \frac{dx_{\lambda}}{dt} \quad (7.32b)$$

Il est aisé de montrer, en électrodynamique subluminaire, que θ satisfait à la relation tensorielle suivante, lorsqu'il y a conservation de la masse propre:⁺⁺

$$\frac{\partial(\theta^{\kappa}_{\lambda})'}{\partial(x_{\lambda})'} = (G^{\kappa\lambda})' (J_{\lambda})' \quad (7.33)$$

Soustrayant (7.30) de (7.33), on obtient une relation qui, puisqu'elle est tensorielle, peut s'écrire aussi bien dans Σ que dans Σ' ; ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial(x_{\lambda})'} \left[(\theta^{\kappa}_{\lambda})' - (T^{\kappa}_{\lambda})' \right] = 0 \quad (7.34a) \quad \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \left[\theta^{\kappa}_{\lambda} - T^{\kappa}_{\lambda} \right] = 0 \quad (7.34b)$$

⁺Il va sans dire que μ'_0 n'est pas un scalaire: elle est en effet le quotient d'un scalaire (la masse propre) et d'une quantité non invariante (l'élément de volume).

⁺⁺Voir [37], chapitre IV, section 33.

On peut interpréter (7.34) comme la loi de conservation, sous forme différentielle, de l'énergie et de l'impulsion totales du champ électromagnétique et de la matière.

En guise d'application, nous allons montrer dans un cas particulier comment le tenseur \hat{T} sert à représenter l'énergie et l'impulsion du champ. Plus précisément, considérons, du point de vue du référentiel Σ , un tachyon chargé qui se déplace à une vitesse u selon le corridor, et formons l'intégrale suivante:

$$\frac{E_0}{c} \iiint_S \hat{T}^\mu{}_\nu d\sigma^\nu \quad (7.35)$$

où S est une hypersurface tridimensionnelle infinie perpendiculaire à la ligne d'univers du tachyon et où $d\sigma^\nu$ est un 4-vecteur parallèle à la ligne d'univers et dont le module est égal à un élément infinitésimal de S (voir la figure 2.). Nous allons montrer que l'on peut identifier (7.35) au 4-vecteur impulsion du champ électromagnétique. Pour ce faire, nous allons ramener (7.35) en fonction d'une intégrale subluminaire.

En égard aux équations (4.5a) et (4.5c), nous pouvons écrire

$$\hat{T}^\mu{}_\nu d\sigma^\nu = \alpha_{\kappa\mu} \beta_{\lambda\nu} (T^\kappa{}_\lambda)' \alpha_{\pi\omega} (d\sigma^\pi)' \quad (7.36)$$

Si l'on utilise une des propriétés (aisément vérifiable au moyen de (4.4)) des matrices α et β , à savoir que $\beta_{\lambda\nu} \alpha_{\pi\omega} = \delta_{\lambda\pi}$, (7.36) devient

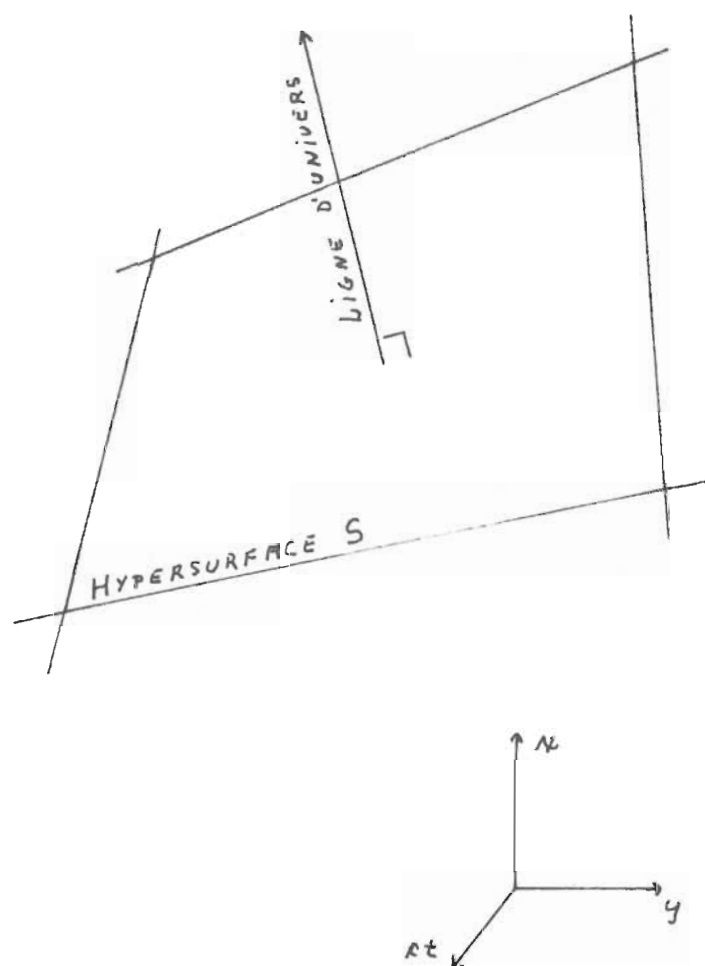


Figure 2. Représentation (sans la coordonnée z) de l'hyper-surface infinie S sur laquelle on intègre le tenseur \hat{T} ; S est perpendiculaire à la ligne d'univers de la particule.

$$\gamma^\mu{}_\omega d\sigma^\omega = \alpha_{\kappa\mu} (\gamma^\kappa{}_\lambda)' (d\sigma^\lambda)' \quad (7.37)$$

L'intégrale (7.35) peut donc s'écrire comme

$$\alpha_{\kappa\mu} \frac{\epsilon_0}{\lambda} \iiint_S (\gamma^\kappa{}_\lambda)' (d\sigma^\lambda)' \quad (7.38)$$

Si l'on veut calculer cette intégrale en se servant des coordonnées de \mathcal{Z}' , il faut bien connaître la configuration de S et de $d\sigma$ dans ce référentiel. Puisque la particule se déplace dans \mathcal{Z} à une vitesse u le long du corridor, elle est immobile dans \mathcal{Z}' . Sa ligne d'univers est donc parallèle à l'axe $\kappa t'$. Or nous avons défini $d\sigma$ parallèle à la ligne d'univers. Par conséquent, la seule composante de ce 4-vecteur qui ne s'annule pas dans \mathcal{Z}' , est la quatrième. D'autre part, l'hypersurface S est perpendiculaire au vecteur $d\sigma$. Du point de vue de \mathcal{Z}' , elle est donc normale à l'axe $\kappa t'$, et se confond ainsi avec le volume tridimensionnel ordinaire. Puisque le module de $d\sigma$ est égal à un élément infinitésimal de S , on peut maintenant conclure que $(d\sigma^\lambda)' = d\kappa' dy' dz'$. Par le fait même, (7.38) devient

$$\alpha_{\kappa\mu} \frac{\epsilon_0}{\lambda} \iiint_{V'} (\gamma^\kappa{}_\lambda)' d\kappa' dy' dz' \quad (7.39)$$

Voyons maintenant à quoi ressemblent les composantes $(\gamma^\kappa{}_\lambda)'$ du tenseur γ dans \mathcal{Z}' . Servons-nous pour cela de l'équation (7.24). Il est clair que dans notre cas, $\vec{B}' = 0$, puisque nous considérons le champ é-

lectromagnétique d'une particule qui est immobile dans Σ' . Par conséquent, seule la composante $(\gamma^4_4)'$ ne s'annule pas. On peut d'ailleurs l'écrire explicitement au moyen de (7.25). On obtient:

$$\begin{aligned} (\gamma^4_4)' &= \frac{1}{2} \left[(E_x')^2 + (E_y')^2 + (E_z')^2 \right] \\ &= \frac{\vec{E}' \cdot \vec{E}'}{2} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Par le fait même, (7.39) devient

$$\frac{\alpha_{4\mu}}{\mathcal{L}} \left[\epsilon_0 \iiint_{V'} \frac{\vec{E}' \cdot \vec{E}'}{2} d\kappa' dy' dz' \right] \quad (7.41)$$

La quantité entre crochets dans (7.41) n'est rien d'autre que l'énergie contenue dans le champ du bradyon immobile. D'ailleurs, il est bien connu que le 4-vecteur impulsion $(\mathcal{P}^\kappa)'$ du champ électromagnétique d'un bradyon immobile est donné par⁺

$$(\mathcal{P}^\kappa)' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{V'} \vec{E}' \cdot \vec{E}' d\kappa' dy' dz' \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

⁺Voir [1], chapitre 5, section 5.

ce qui fait que l'intégrale (7.41) est égale à

$$\alpha_{\kappa\mu} \left(P^{\kappa} \right)' \quad (7.43)$$

Arrêtons-nous maintenant pour voir où nous en sommes: nous voulions montrer que l'intégrale (7.35) peut représenter le 4-vecteur impulsion du champ d'un tachyon. Par une série de transformations, nous avons montré que (7.35) est équivalente à (7.43). Or (7.43) n'est rien d'autre que la transformée supraluminale du 4-vecteur impulsion du champ d'un bradyon immobile. Par conséquent (7.43) et, bien sûr, (7.35) représentent bel et bien le 4-vecteur impulsion du champ d'un tachyon.

D. Lois de conservation sous forme intégrale

Nous avons signalé, à la section précédente, que la relation tensorielle (7.34) représente la loi de conservation, sous forme différentielle, de l'énergie et de l'impulsion totales. Nous allons examiner ici la forme intégrale de cette relation, surtout du point de vue d'un observateur supraluminal.

Intégrons donc l'équation (7.34) sur un hypervolume Ω de l'espace quadridimensionnel; nous obtenons:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \left[\theta^{\kappa}_{\lambda} - T^{\kappa}_{\lambda} \right] dx dy dz d(ct) = 0 \quad (7.44)$$

qui devient, par l'utilisation du théorème général de la divergence de Gauss

$$\iiint_S [\theta^\kappa_\lambda - T^\kappa_\lambda] d\sigma^\lambda = 0 \quad (7.45)$$

où S est une hypersurface tridimensionnelle constituant la frontière de l'hypervolume Ω et $d\sigma^\lambda$ est un quadrivecteur dont le module est égal à un élément infinitésimal de S et dont la direction correspond à celle de la normale extérieure de S .

Lorsqu'on effectue, en électrodynamique subluminale, le développement des lois de conservation intégrales, on choisit d'habitude le volume Ω de (7.44) comme étant cette partie de l'espace quadridimensionnel comprise entre les hypersurfaces $t' = t'_1$ et $t' = t'_2$ ($t'_1 < t'_2$) (voir la figure 3.). Dès lors l'intégrale (7.45) peut être convenablement séparée en trois parties: une première intégrale sur l'hypersurface S_1 ($t' = t'_1$), où $(d\sigma^\lambda)'$ est tel que $(d\sigma^1)' = (d\sigma^2)' = (d\sigma^3)' = 0$ et que $(d\sigma^4)' = -dx' dy' dz'$; une deuxième sur S_2 ($t' = t'_2$) où $(d\sigma^\lambda)'$ est tel que $(d\sigma^1)' = (d\sigma^2)' = (d\sigma^3)' = 0$ et que $(d\sigma^4)' = dx' dy' dz'$; une troisième sur S_3 , hypercylindre situé à l'infini et compris entre S_1 et S_2 . Si l'on suppose alors qu'à un instant arbitraire t'_0 la matière et les champs électromagnétiques sont entièrement contenus dans une région finie de l'espace tridimensionnel (ou, autrement dit, qu'il n'y a rien à l'infini à l'instant t'_0), il s'ensuit que l'intégrale sur S_3 s'annule. Ce résultat découle du fait que la vitesse de propagation des champs et des particules est finie en électrodynamique subluminale (elle n'est jamais supérieure à c) et que dès lors notre condition, stipulant que tout est contenu dans un volume fini à

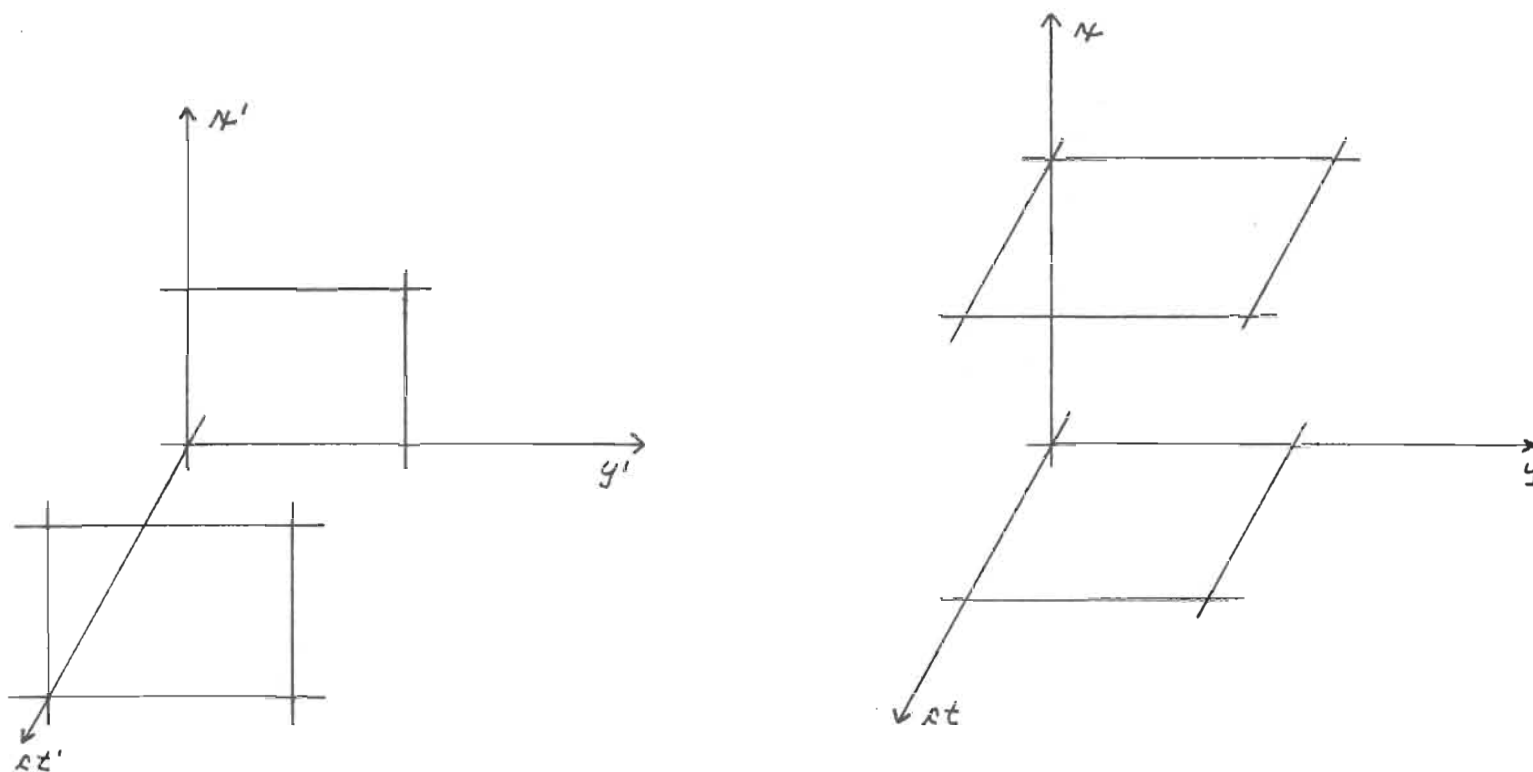


Figure 3. Pour obtenir les lois de conservation sous forme intégrale, on intègre entre deux hypersurfaces qui sont ou bien perpendiculaires à l'axe ct' (cas subluminal, illustré à gauche), ou bien perpendiculaires à l'axe ct (cas supraluminal, illustré à droite).

$t' = t_0'$, reste valable à tout instant antérieur ou postérieur à t_0' .

Par conséquent l'équation (7.45) devient, dans \mathcal{L}'

$$\iiint_{S_1: t' = t_1'} \left[(\theta^{\kappa}_\nu)' - (\gamma^{\kappa}_\nu)' \right] dV' = \iiint_{S_2: t' = t_2'} \left[(\theta^{\kappa}_\nu)' - (\gamma^{\kappa}_\nu)' \right] dV' \quad (7.46)$$

On peut vérifier que (7.46), écrite explicitement au moyen de (7.24) et de (7.32a), représente la loi de conservation, sous forme intégrale, de l'énergie et de l'impulsion totales.

Si l'on considère maintenant le problème du point de vue d'un observateur supraluminal, l'hypothèse de l'absence de champs et de matière à l'infini peut difficilement être formulée de la même manière. En effet, même s'il arrivait qu'à un instant t_0 tout fût contenu dans un volume fini, rien ne nous assurerait qu'il en serait ainsi à tout autre instant. Il n'existe pas, nous le savons, de vitesse limite dans \mathcal{L} . Ainsi une particule, voisine de l'origine à $t = t_0$, peut en être aussi éloignée qu'on le désire à $t = t_1 \neq t_0$. Elle peut donc contribuer à l'intégrale sur S_3 .

D'autre part quoiqu'il n'y ait pas de limite, dans \mathcal{L} , à la vitesse d'une particule, il y en a une, comme nous l'avons remarqué en (5.36), à sa vitesse réciproque. Dès lors au lieu d'intégrer l'équation (7.44) sur l'hypervolume compris entre les hypersurfaces $t = t_1$ et $t = t_2$, intégrons-la sur cette partie de l'espace quadridimensionnel qui est comprise entre les hypersurfaces $\kappa = \kappa_1$ et $\kappa = \kappa_2$ (voir la figure 3.). Nous pouvons alors supposer raisonnablement qu'il n'y a, à $\kappa = \kappa_0$, ni matière ni champs à l'infini (i.e. à $y = \infty$, $z = \infty$, $\kappa t = \infty$), condition qui

demeure valable sur toute hypersurface $\kappa = \kappa_1$ (si $\kappa_2 - \kappa_0$ est finie) puisque les vitesses réciproques des particules et des champs sont limitées. L'intégrale sur le nouvel hypercylindre (situé à l'infini et compris entre $\kappa = \kappa_1$ et $\kappa = \kappa_2$) s'annule donc, et (7.45) nous donne

$$\iiint_{\kappa=\kappa_1} (\theta^{\kappa_1} - \gamma^{\kappa_1}) dy dz d(\kappa t) = \iiint_{\kappa=\kappa_2} (\theta^{\kappa_2} - \gamma^{\kappa_2}) dy dz d(\kappa t) \quad (7.47)$$

(7.47) représente en réalité quatre équations, qui correspondent respectivement à chacune des valeurs de κ . Ecrivons explicitement, au moyen de (7.27) et (7.32b), les quatre types d'intégrales impliquées:

$$\iiint_{\kappa=\kappa_1} \left[\frac{-\mu_0 |\mu_x| \mu_x}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - \kappa^2}{\kappa^2}}} - W \right] dy dz d(\kappa t) \quad (7.48a)$$

$$\iiint_{\kappa=\kappa_1} \left[\frac{-\mu_0 |\mu_x| \mu_y}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - \kappa^2}{\kappa^2}}} + E_x E_y + \kappa^2 B_{0x} B_{0y} \right] dy dz d(\kappa t) \quad (7.48b)$$

$$\iiint_{\kappa=\kappa_1} \left[\frac{-\mu_0 |\mu_x| \mu_z}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - \kappa^2}{\kappa^2}}} + E_x E_z + \kappa^2 B_{0x} B_{0z} \right] dy dz d(\kappa t) \quad (7.48c)$$

$$\iiint_{\kappa=\kappa_1} \left[\frac{-\mu_0 |\mu_x| \kappa}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{\mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2 - \kappa^2}{\kappa^2}}} - \kappa (\vec{E} \times \vec{B}_0)_x \right] dy dz d(\kappa t) \quad (7.48d)$$

Les trois premières intégrales sont proportionnelles aux composantes de l'impulsion totale du champ électromagnétique et de la matière;

la quatrième est proportionnelle à l'énergie totale divisée par κ^+ . L'équation (7.47) signifie alors que chacune de ces quantités est constante. Mais attention! Elle ne dit pas qu'elles sont constantes en ce sens qu'elles valent à t_2 ce qu'elles valaient à t_1 . Elles sont constantes sous un changement de κ , c'est-à-dire qu'elles valent à κ_1 ce qu'elles valent à κ_2 , ... Nous nous rappelons qu'au chapitre V, nous avons vu que l'énergie et l'impulsion d'une particule supraluminale libre sont tout aussi bien conservées selon t que selon κ . Dans le cas plus général de particules supraluminales en interaction, nous n'affirmons plus que la conservation selon κ , laissant dans l'état actuel de notre travail l'autre en suspens.

Nous pouvons raisonner de façon analogue au niveau de la conservation de la charge électrique. On sait qu'en notation tensorielle, l'équation dite de continuité peut s'écrire comme

$$\frac{\partial J^\kappa}{\partial x^\kappa} = 0 \quad (7.49)$$

Si l'on intègre cette équation sur un hypervolume Ω , on obtient:

$$\varepsilon_0 \iiint_{\Omega} \frac{\partial J^\kappa}{\partial x^\kappa} dx dy dz d(xt) = 0 \quad (7.50)$$

qui devient, après application du théorème de Gauss

$$\iiint_S \varepsilon_0 J^\kappa d\sigma_\kappa = 0 \quad (7.51)$$

⁺ Les facteurs de proportionnalité sont $-\kappa/\varepsilon_0$.

Dans un référentiel supraluminal nous pouvons, comme tout à l'heure, choisir l'hypervolume compris entre les hypersurfaces $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2$, et obtenir:

$$\iiint_{\mathcal{K}=\mathcal{K}_1} \varepsilon_0 \int^1 dy dz d(ct) = \iiint_{\mathcal{K}=\mathcal{K}_2} \varepsilon_0 \int^1 dy dz d(ct) \quad (7.52)$$

qui devient, après utilisation de (6.2a)

$$\iiint_{\mathcal{K}=\mathcal{K}_1} \frac{J_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} dy dz d(ct) = \iiint_{\mathcal{K}=\mathcal{K}_2} \frac{J_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} dy dz d(ct) \quad (7.53)$$

Nous avons ici encore une loi de conservation qui s'effectue selon \mathcal{K} plutôt que selon t . Nous allons vérifier que les intégrales dans (7.53) représentent bel et bien la charge électrique totale.

Pour ce faire, considérons un référentiel \mathcal{Z}'' qui se déplace par rapport à \mathcal{Z} à une vitesse infinie. Les transformations entre \mathcal{Z} et \mathcal{Z}'' des coordonnées et des composantes du 4-vecteur $J^{\mathcal{K}}$ s'effectuent selon (4.5a) et on obtient, entre autres relations:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{K}'' & y &= y'' & z &= z'' \\ t &= \mathcal{K}''/\mathcal{K} & J_{\mathcal{K}} &= \mathcal{K} \rho'' \end{aligned} \quad (7.54)$$

La première intégrale de (7.53) devient donc

$$\iiint_{\mathcal{K}t''=\mathcal{K}t_2''} \rho'' dy'' dz'' d\mathcal{K}'' \quad (7.55)$$

qui n'est bien sûr rien d'autre que la charge électrique totale, puisque Σ'' est un référentiel subluminal. L'équation (7.53) exprime donc la conservation, selon \mathcal{K} , de la charge électrique totale dans un référentiel supraluminal.

Les processus supraluminaires sont donc caractérisés par des lois de conservation selon \mathcal{K} . Nous laissons en suspens le problème de la validité des lois de conservation temporelle. Mais nous pouvons nous poser la question suivante: s'il arrive qu'après une étude plus approfondie l'on doive rejeter purement et simplement ces dernières au niveau des phénomènes tachyoniques, ne faudra-t-il pas alors rejeter également le postulat de l'homogénéité de l'espace-temps? Car c'est ce postulat qui, par l'application de la théorie des coordonnées ignorables ou du théorème de Noether, conduit directement, en mécanique analytique subluminale, aux lois de conservation temporelle.

Nous ne croyons pas que ce rejet soit nécessaire. Ce qui, dans les processus tachyoniques, rendrait caduques les lois de conservation temporelle ne proviendrait pas d'une non-homogénéité de l'espace-temps mais bien de conditions de frontières, i.e. de la présence de champs et de matière à l'infini. Quoi qu'il arrive, l'homogénéité est bel et bien sauvegardée et conduit même naturellement, dans les phénomènes supraluminaires, aux lois de conservation selon \mathcal{K} . Cela, nous l'avions montré à la section D du chapitre V: les lois de conservation spatiale avaient alors été déduites du fait que les coordonnées y , z et ct sont ignorables dans le lagrangien réciproque.

CHAPITRE VIII

CONCLUSION

Jetons un regard d'ensemble sur ce que nous avons fait dans ces quelques chapitres.

Notre but premier était de décrire le comportement de particules supraluminales agissant les unes sur les autres au moyen de champs électromagnétiques. Notre développement repose en définitive sur le postulat de l'existence du corridor des tachyons (dont on obtient les transformations supraluminales des coordonnées), sur le postulat affirmant que les tachyons sont des bradyons dans des référentiels supraluminiaux et sur l'hypothèse selon laquelle les quantités qui se transforment comme des tenseurs sous les transformations de Lorentz gardent cette propriété sous les transformations supraluminales. Nous avons toujours considéré des systèmes classiques (non quantiques) dans un espace à métriques non variables (i.e. sans effets de relativité générale). Nous nous sommes de plus restreints, surtout pour des raisons de simplicité mathématique, aux transformations supraluminales le long du corridor des tachyons. Nous n'avons enfin considéré de façon précise aucun type d'interactions entre

des tachyons et des bradyons; pour décrire ces phénomènes, qu'on ne peut obtenir par aucune transformation d'interactions bradyoniques, il est nécessaire, à notre avis, d'introduire de nouvelles hypothèses.

Nous avons vu que nos hypothèses nous permettent de déduire de nouvelles lois de conservation sous forme intégrale. Lorsque nous avons affaire à des processus supraluminaires nous n'affirmons pas, dans l'état actuel de notre travail, que quelque chose est conservé en ce sens qu'il vaudra demain ce qu'il valait hier. D'autre part, nous pouvons soutenir que des quantités sont constantes sous un changement de \mathcal{K} , c'est-à-dire que leur intégrale sur tout l'espace $y-z-ct$ ne dépend pas de la coordonnée \mathcal{K} où l'on effectue l'intégrale. Autrement dit, nous pouvons affirmer que quelque chose à $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ égale quelque chose à $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2$. On saisit mieux, peut-être, la signification des nouvelles lois de conservation lorsqu'on fait référence au principe de réciprocité qui implique, entre autres choses, l'interversion de la signification des variables \mathcal{K} et ct sous une transformation supraluminale.

Quoique, comme nous l'avons signalé, l'élaboration d'une théorie des interactions entre les tachyons et les bradyons nécessite des hypothèses supplémentaires, les considérations que nous avons faites ne donnent pas moins quelques indices qui peuvent être utiles dans la construction d'une telle théorie.

Si certaines de ces interactions proviennent de l'échange de particules tels les photons virtuels, on doit tenir compte du fait que les photons émis par des tachyons diffèrent généralement de ceux que les bra-

dyons émettent. La vitesse de propagation des uns est fonction de leur direction de propagation, tandis que celle des autres est constante. Toutefois, tous les photons qui se déplacent précisément le long du corridor des tachyons, ont même vitesse. Dès lors, ces derniers jouent peut-être un rôle privilégié dans les interactions entre tachyons et bradyons.

D'autre part, la loi de conservation de l'énergie-impulsion est l'une des mieux établies de toute la physique expérimentale. S'il s'avérait qu'elle ne soit plus valable au niveau des processus tachyoniques, il s'ensuivrait de sévères restrictions au niveau des interactions entre tachyons et bradyons. La non-conservation de l'énergie-impulsion qui résulterait de ces interactions devrait être suffisamment faible pour n'avoir pas été observée jusqu'à présent. Cela signifierait que les tachyons n'existent qu'en très petit nombre, ou n'interagissent que très faiblement avec les bradyons.

Il est intéressant, là où nous en sommes, de revenir plusieurs chapitres en arrière et de jeter un coup d'oeil sur les expériences de détection des tachyons, à la lumière de ce que nous avons jusqu'à maintenant obtenu. Certes ces expériences de détection sont clairement du domaine de l'interaction entre tachyons et bradyons, mais nous pouvons quand même tenter une amorce d'évaluation avec ce que nous possédons déjà.

Considérons d'abord les expériences visant à détecter le rayonnement Čerenkov des tachyons (chapitre II, section A). Nous nous rappelons que tous les résultats avaient été négatifs. Toutefois nous ne croyons pas que cela soit d'une bien grande portée, dans le cadre de l'approche d'Antippa et Everett que nous avons développée dans ce travail, au niveau de l'exclusion de l'existence des tachyons. Pratiquement, nous ne croyons pas que les tachyons émettent un rayonnement Čerenkov. La raison en est simple: un tachyon chargé en mouvement uniforme n'est rien d'autre que la transformée supraluminale d'un bradyon chargé en mouvement uniforme. Or ce dernier n'émet aucun photon dans le vide. Du point de vue d'un référentiel supraluminal, il n'y aura donc aucun photon émis par le tachyon. Vu sous un autre angle, nous avons signalé au chapitre V que l'énergie et l'impulsion d'un tachyon libre sont conservés. Un tel tachyon ne peut donc émettre d'énergie.[†]

Considérons maintenant les expériences basées sur les propriétés dynamiques des tachyons (chapitre II, section B). La plupart cherchaient des interactions où l'énergie et l'impulsion de certaines particules fussent compatibles avec les équations (1.1) et (1.2), et donc très différentes de l'énergie et de l'impulsion des particules subluminales. Quoique selon notre travail l'énergie et l'impulsion d'un tachyon soient don-

[†]Ce résultat, selon lequel les tachyons n'émettent pas de rayonnement Čerenkov, vient d'être obtenu également dans le cadre d'une autre théorie des référentiels supraluminaux [42]. Incidemment, on trouvera en [81] beaucoup de détails sur l'évaluation des données expérimentales dans le cadre de l'approche d'Antippa et Everett.

nées par (5.6) plutôt que par (1.1) et (1.2), il n'en reste pas moins qu'elles sont fort différentes de celles d'un bradyon. Il est donc possible que, si dans les expériences dont nous parlons des tachyons obéissant à la relation (5.6) avaient été produits, ils eussent été reconnus. Toutefois, toutes ces expériences supposent que les tachyons sont produits au cours de réactions très spécifiques, telles (2.6) et (2.7), analogues à des réactions de bradyons. Cette supposition peut fort bien n'être pas du tout valable, vu les grandes différences qui existent entre le comportement des tachyons et celui des bradyons, d'une part, et entre les comportements des photons qu'ils émettent, d'autre part.

En définitive la possibilité de détecter des tachyons est, comme nous l'avons dit, sous-jacente à leurs interactions avec les bradyons. L'élaboration d'une théorie de ces interactions pourrait constituer la suite de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. Aharoni, J., The Special Theory of Relativity, Oxford University Press, London (1965).
2. Aharonov, Y., Komar, A. et Susskind, L., Physical Review, 182, 1400 (1969).
3. Alväger, T. et Kreisler, M. N., Physical Review, 171, 1357 (1968).
4. Arons, M. E. et Sudarshan, E. C. G., Physical Review, 173, 1622 (1968).
5. Baltay, C., Feinberg, G., Yeh, N. et Linsker, R., Physical Review, D1, 759 (1970).
6. Bartlett, D. F. et Lahana, M. D., Physical Review, D6, 1817 (1972).
7. Benford, G. A., Book, D. L. et Newcomb, W. A., Physical Review, D2, 263 (1970).
8. Bers, A., Fox, R., Kuper, C. G. et Lipson, S. G., in Relativity and Gravitation, édité par C. G. Kuper et A. Peres, Gordon and Breach Sciences Publishers, New York, pp. 41-46 (1971).
9. Bilaniuk, O. M. P., Deshpande, V. K. et Sudarshan, E. C. G., American Journal of Physics, 30, 718 (1962).
10. Bilaniuk, O.-M. et Sudarshan, E. C. G., Physics Today, 22 (no. 5), 43 (1969).
11. Bilaniuk, O.-M., Brown, S. L., Dewitt. B., Newcomb, W. A., Sachs, M., Sudarshan, E. C. G. et Yoshikawa, S., Physics Today, 22 (no. 12), 47 (1969).

12. Broido, M. M. et Taylor, J. G., Physical Review, 174, 1606 (1968).
13. Cawley, R. G., Physical Review, D2, 276 (1970).
14. Csonka, P. L., Physical Review, 180, 1266 (1969).
15. Csonka, P. L., Nuclear Physics, B21, 436 (1970).
16. Danburg, J. S., Kalbfleisch, G. R., Borenstein, S. R., Strand, R. C.,
VanderBurg, V., Chapman, J. W. et Lys, J., Physical Review, D4, 53
(1971).
17. Danburg, J. S. et Kalbfleisch, G. R., Physical Review, D5, 1575 (1972).
18. Davis, M. B., Kreisler, M. N. et Alväger, T., Physical Review, 183,
1132 (1969).
19. Dhar, J. et Sudarshan, E. C. G., Physical Review, 174, 1808 (1968).
20. Drope, Eckard, Zeitschrift für Physik, 258, 163 (1973).
21. Feinberg, G., Physical Review, 159, 1089 (1967).
22. Feinberg, G., Scientific American, 222 (no. 2), 68 (1970).
23. Foster, J. C. Jr. et Ray, J. R., Journal of Mathematical Physics, 13,
979 (1972).
24. Fox, R., Physical Review, D5, 329 (1972).
25. Fox, R., Kuper, C. G. et Lipson, S. G., Proceedings of the Royal
Society of London, A316, 515 (1970).
26. Ginzburg, V. L., Comments Astrophysics and Space Physics, 4 (no. 2),
41 (1972).
27. Glück, M., Il Nuovo Cimento, 67A, 658 (1970).
28. Glück, M., Il Nuovo Cimento, 62A, 791 (1969).
29. Glück, M., Il Nuovo Cimento, 1A, 467 (1971).
30. Gldoni, R., Lettere al Nuovo Cimento, 5, 495 (1972).
31. Goldstein, H., Mécanique classique, Presses universitaires de France,
Paris (1964).

32. Huberman, B. A., *Physics Letters*, 36B, 573 (1971).
33. Jones, F. C., *Physical Review*, D6, 2727 (1972).
34. Jones, R. T., *Journal of the Franklin Institute*, 275, 1 (1963).
35. Kamei, K. et Kamefuchi, S., *Progress of Theoretical Physics*, 45, 1646 (1971).
36. Kreisler, M. N., *American Scientist*, 61, 201 (1973).
37. Landau, L. et Lifchitz, E., *Théorie des champs*, Mir, Moscou (1970).
38. Leiter, D., *Lettere al Nuovo Cimento*, 1, 395 (1971).
39. Mariwalla, K. H., *American Journal of Physics*, 37, 1281 (1969).
40. Mignani, R., Recami, E. et Lombardo, U., *Lettere al Nuovo Cimento*, 4, 624 (1972).
41. Mignani, R. et Recami, E., *Il Nuovo Cimento*, 14A, 169 (1973).
42. Mignani, R. et Recami, E., *Tachyons Do not Emit Cherenkov Radiation in Vacuum*, Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Catania, Preprint 371 (1973).
43. Möller, C., *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, London (1969).
44. Morse, P. M. et Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1953).
45. Newton, R. G., *Physical Review*, 162, 1274 (1967).
46. Newton, R. G., *Science*, 167, 1569 (1970).
47. Olkhovsky, V. S. et Recami, E., *Lettere al Nuovo Cimento*, 1, 165 (1971).
48. Panofsky, W. K. H. et Phillips, M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (1962).
49. Parker, L., *Physical Review*, 188, 2287 (1969).
50. Permentola, J. A. et Yee, D. D. H., *Physical Review*, D4, 1912 (1971).

51. Peres, A. et Schulman, L. S., International Journal of Theoretical Physics, 6, 377 (1972).
52. Pirani, F. A. E., Physical Review, D1, 3224 (1970).
53. Ramachandran, G., Tagare, S. G. et Kolaskar, A.S., Lettere al Nuovo Cimento, 4, 1411 (1972).
54. Ramana Murthy, P. V., Lettere al Nuovo Cimento, 1, 908 (1971).
55. Whitney, A. et al., Science, 173, 225 (1971).
56. Recami, E. et Mignani, R., Lettere al Nuovo Cimento, 4, 1444 (1972).
57. Rolnick, W. B., Physical Review, 183, 1105 (1969).
58. Rolnick, W. B., Physical Review, D6, 2300 (1972).
59. Root, R. G. et Trefil, J. S., Lettere al Nuovo Cimento, 3, 412 (1970).
60. Rosser, W. G. V., An Introduction to the Theory of Relativity, Butterworths, London (1964).
61. Salzman, F. et Salzman, G., Lettere al Nuovo Cimento, 1, 859 (1969).
62. Schmidt, H., Zeitschrift für Physik, 151, 365 (1958).
63. Schmidt, H., Zeitschrift für Physik, 151, 408 (1958).
64. Schroer, B., Physical Review, D3, 1764 (1971).
65. Schulman, L. S., Il Nuovo Cimento, 2B, 38 (1971).
66. Schulman, L. S., American Journal of Physics, 39, 481 (1971).
67. Sen Gupta, N. D., Nuclear Physics, B27, 104 (1971).
68. Stratton, J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1941).
69. Streit, L. et Klauder, J. R., Tachyon Quantization, Syracuse University, Preprint (1970).
70. Strnad, J., Fortschritte der Physik, 18, 237 (1970).
71. Sudarshan, E. C. G., Particles Traveling Faster than Light, transcription d'une conférence prononcée à Madras en Janvier 1971.

72. Tanaka, S., Progress of Theoretical Physics, 24, 171 (1960).
73. Taylor, J. G., Science Journal, 5A (no. 3), 43 (1969).
74. Terletskii, Y. P., Soviet Physics-Doklady, 5, 782 (1960).
75. Terletskii, Y. P., Paradoxes in the Theory of Relativity, Plenum Press, New York (1970).
76. Thouless, D. J., Nature, 224, 506 (1969).
77. Wimmel, H. K., Lettere al Nuovo Cimento, 1, 645 (1971).
78. Yourgrau, W. et Mandelstam, S., Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia (1968).
79. Antippa, A. F. et Everett, A. E., Physical Review, D4, 2198 (1971).
80. Antippa, A. F., Il Nuovo Cimento, 10A, 389 (1972).
81. Antippa, A. F. et Everett, A. E., Tachyons, Causality and Rotational Invariance, Université du Québec à Trois-Rivières, Preprint (1973).